Colección Compendios Académicos UNI

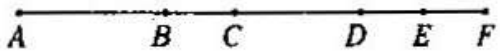
Geometría

Solimar Flores Espíritu
Aldo Gutiérrez Cárdenas

Lumbreras
Editores

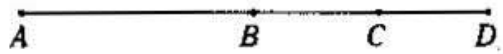
NIVEL BÁSICO

1. Se tiene que $AB=BD$; $CD=DF$ y $DE=EF$. Halle BE si $CD=2$ y $AF=8$.



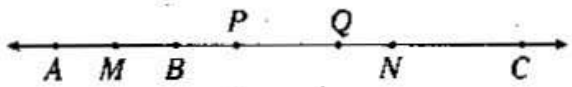
A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

2. Se tiene que $AB+BC=8$ y $CD=2$. Calcule BD si BC es máximo y entero.



A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

3. En una recta, M, N, P y Q son puntos medios de AB, BC, AN y MC, respectivamente.



Si $BC=40$ y $PN=12$, halle QN.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 1
D) $\frac{2}{3}$ E) 2

4. Sean los puntos colineales y consecutivos A, B, C, D, E y F, de modo que B y D son puntos medios de AD y CF, respectivamente. Calcule BE si $CD=2$, $AF=8$ y $EF=1$.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

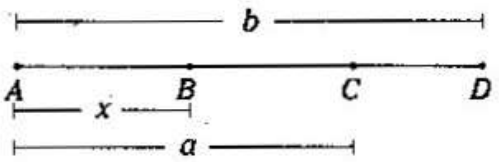
5. Sean los puntos colineales y consecutivos A, B, C y D, tal que $AB+BC=8$ $(AB>BC)$ y $CD=2$. Calcule BD si BC es máximo y entero.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

6. En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B y C, donde M, N, P y Q son puntos medios de AB, BC, AN y MC, respectivamente. Si $BC=10$ y $PQ=8$, calcule AB.

A) 18 B) 20 C) 22
D) 25 E) 28

7. Del gráfico, calcule x.



Dato: $\frac{1}{b}+\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$ y $(AB)(CD+2(AC))=4(AD)(AC)$

A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 10

8. Sean los puntos colineales y consecutivos A, B, C, D, E y F, de modo que $AF=6$ y $\frac{1}{CD}=\frac{BC}{AB}=\frac{DE}{EF}=\frac{1}{3}$. Calcule BE.

A) 2,5 B) 3 C) 3,5
D) 3,75 E) 4

9. Sean los ángulos consecutivos AOB, BOC, COD, DOE y EOF, de modo que los rayos OB y OE son bisectrices de los ángulos AOC y DOF, respectivamente. Si la $m\measuredangle AOD=m\measuredangle COF=90°$, calcule la $m\measuredangle BOE$.

A) 30° B) 60° C) 90°
D) 120° E) 150°

10. Se tienen los ángulos consecutivos *AOB*, *BOC*, *COD*, *DOE* y *EOF*, donde los rayos *OB*, *OE* y *OD* son bisectrices de los ángulos *AOC*, *DOF* y *BOE*, respectivamente. Si $SC(m\measuredangle COF)=150°$ y la $m\measuredangle AOF=90°$, calcule la $m\measuredangle COD$.

A) 5° B) 10° C) 12°
D) 15° E) 30°

11. Si a la medida de un ángulo le disminuimos un tercio de la suma entre el complemento y un cuarto de este, el resultado es un medio de la diferencia entre el suplemento y el complemento de la medida del ángulo. Calcule la medida de dicho ángulo.

A) 15° B) 18° C) 36°
D) 45° E) 60°

12. Si al suplemento del suplemento de un ángulo se le aumenta el complemento de un ángulo cuya medida es la mitad de la medida del primero, ello resulta igual a la tercera parte del suplemento de dicho ángulo aumentado en 60°. Calcule la medida de dicho ángulo.

A) 36° B) 45° C) 18°
D) 54° E) 72°

NIVEL INTERMEDIO

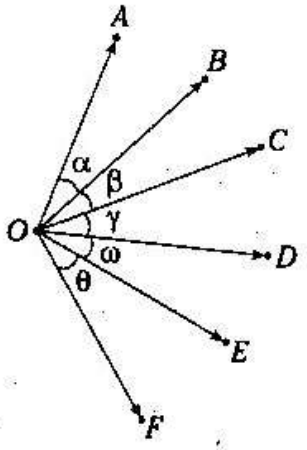
13. Se tienen los ángulos consecutivos *AOB*, *BOC* y *COD*, tal que $m\measuredangle COD=20°$, $m\measuredangle AOB-m\measuredangle BOC=50°$ y $m\measuredangle AOB$ es mínimo entero. Calcule $m\measuredangle AOD$.

A) 42° B) 36° C) 72°
D) 30° E) 70°

14. Se tienen los ángulos consecutivos *AOB*, *BOC* y *COD* de medidas enteras que suman 180°. Si dos son iguales y menores a 56° y la $m\measuredangle AOM=99°$ (*OM* es bisectriz del $\measuredangle BOC$), calcule el menor valor de estas tres medidas.

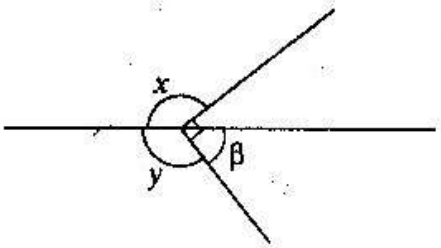
A) 52° B) 54° C) 73°
D) 72° E) 81°

15. Del gráfico $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{50°}$; $\frac{\theta}{\gamma}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+\theta+\omega}$ y $\frac{\theta}{\alpha}=\frac{\theta+\omega}{\alpha+\beta+\theta+\omega}$. Calcule θ.



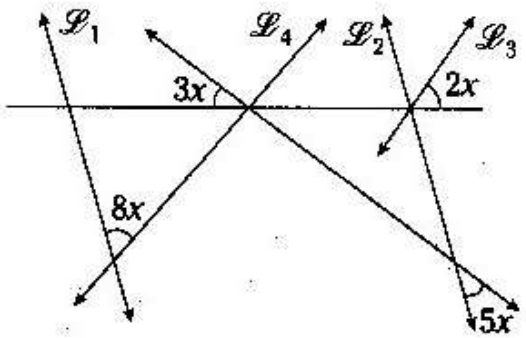
A) 20° B) 26° C) 30°
D) 45° E) 50°

16. En el gráfico, halle β si $x-y=50°$.



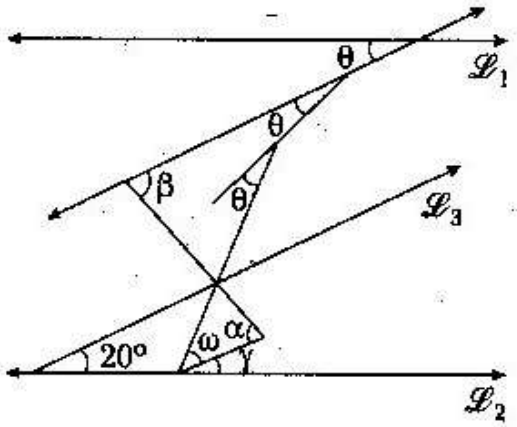
A) 70° B) 65° C) 80°
D) 100° E) 75°

17. En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_4}$. Calcule $SC(x)$.



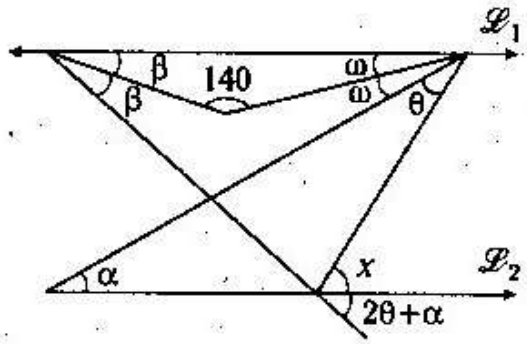
A) 130° B) 120° C) 114°
D) 96° E) 100°

18. En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$. Calcule $\alpha+\omega-\beta$.



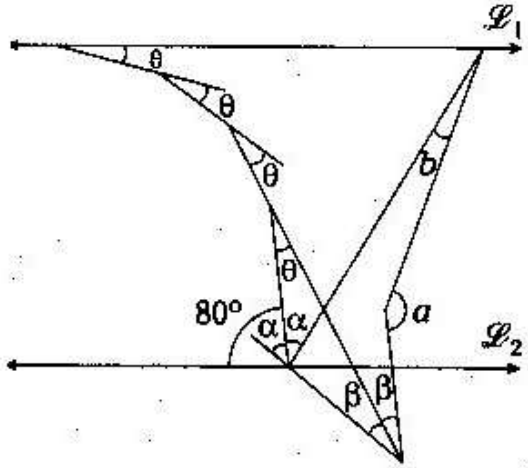
A) 23° B) 30° C) 40°
D) 35° E) 42°

19. En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$. Halle x.



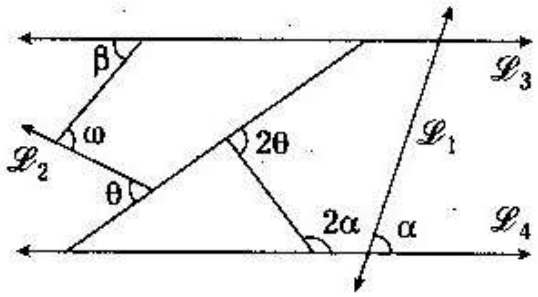
A) 36° B) 40° C) 45°
D) 72° E) 80°

20. En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$. Calcule $a-b$.



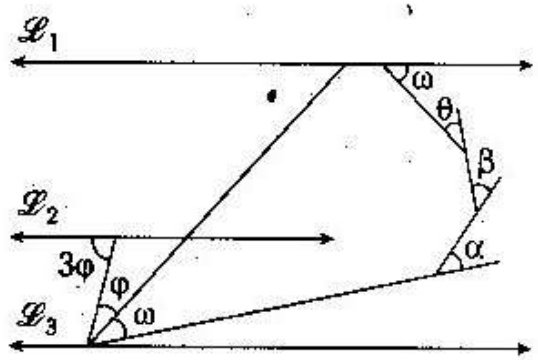
A) 50° B) 80° C) 140°
D) 150° E) 170°

21. En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_4}$. Calcule la medida del ángulo formado por $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ si $\beta+\theta-\omega=20°$.



A) 70° B) 80° C) 50°
D) 120° E) 72°

22. En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$.
Halle φ si $\alpha+\beta+\theta=120°$.

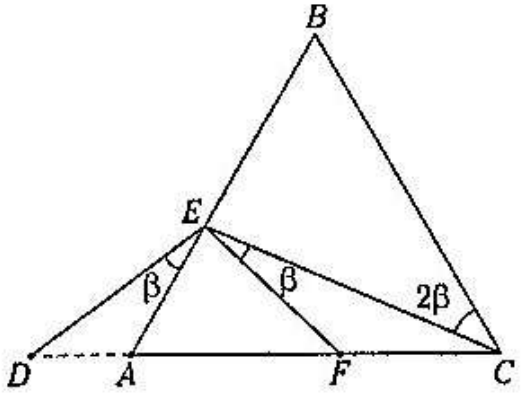


A) 25° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 35°

PROBLEMAS PROPUESTOS

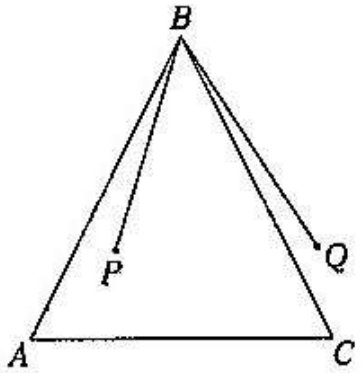
NIVEL BÁSICO

Del gráfico, $AB=BC$; $DE=3$ y $EC=6$. Calcule el mínimo valor entero de FC.



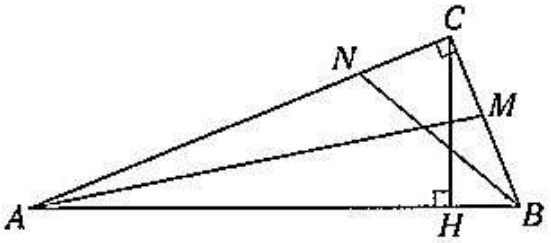
A) 2 B) 4 C) 5
D) 8 E) 6,7

Del gráfico, $\overline{AC}$ es base del triángulo ABC; además, $PB=BQ$, $m\measuredangle ABP=m\measuredangle CBQ=10$ y $m\measuredangle PBC=20°$. Halle la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos APQ y PQC.



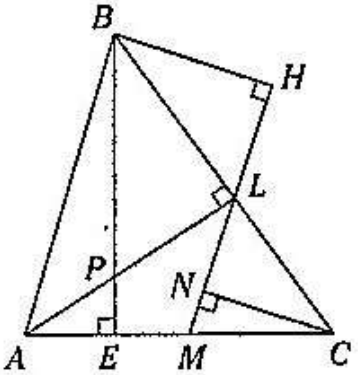
A) 15° B) 50° C) 75°
D) 30° E) 45°

Del gráfico, AM y BN son bisectrices que intersecan a CH en P y Q, respectivamente. Si $CP=3$ y $PQ=1$ (C, P, Q, H, en ese orden), halle MN.



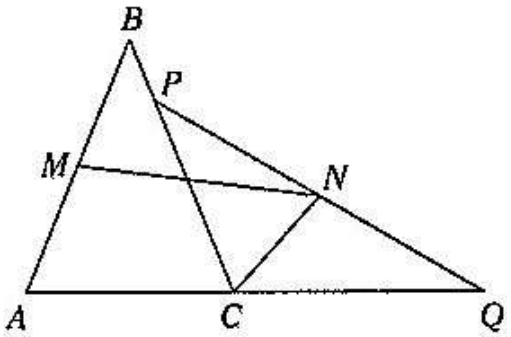
A) $3\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{2}$ C) 5
D) 6 E) 8

4. Si $BP=AC$; $BH=7$; $AM=MC$ y $MN=2$, halle ML.



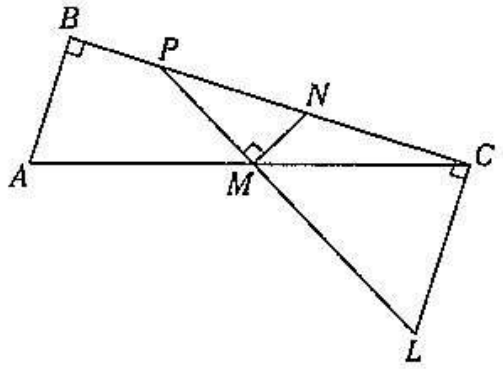
A) 2 B) 4 C) 5
D) 7 E) 9

5. Del gráfico, M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{PQ}$, respectivamente, y los triángulos ABC y PQC son congruentes. Halle la $m\measuredangle MNC$.



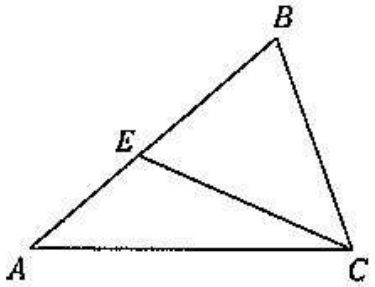
A) 15° B) 45° C) 53°
D) 60° E) 30°

6. Del gráfico, $PC=AB+BP$ y $AM=MC$; además, las distancias de L y N a MC son 7 y 2, respectivamente. Calcule AC.



A) 5 B) 8 C) 10
D) 12 E) 14

7. Del gráfico, $m\measuredangle BAC=2m\measuredangle ACE=50°$ y $m\measuredangle BCE=40°$. Determine $\frac{AE}{BC}$.

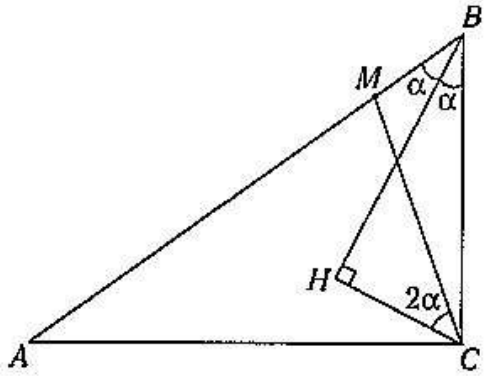


A) $\frac{\sqrt{3}+2}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}-2}{2}$ C) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$
D) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ E) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$

8. En el triángulo ABC, se traza la mediana CM, tal que $MB=AC$ y $m\measuredangle MCB=45°$. Halle la $m\measuredangle CAB$.

A) 15° B) 30° C) 37°
D) 53° E) 60°

9. Se tiene que $HC=2{,}5$ y $AM=10$. Calcule el máximo valor entero de AC.



A) 9 B) 20 C) 11,1
D) 14 E) 11

10. En un triángulo ABC de base AC, se ubica P en la región interior. Si $AP=BC$ y $BP=PC$, además, $m\measuredangle BAP=20°$ y $m\measuredangle APC=130°$, calcule $m\measuredangle PBC$.

A) 15° B) 5° C) 30°
D) 10° E) 20°

11. En un triángulo ABC, se ubican P, Q y R en la región interior, región exterior relativa a AB y en la prolongación de PA, respectivamente, tal que AQ y CQ son bisectrices de los ángulos BAR y BCP, respectivamente; además, $m\measuredangle ABC+m\measuredangle APC=220°$. Halle $m\measuredangle AQC$.

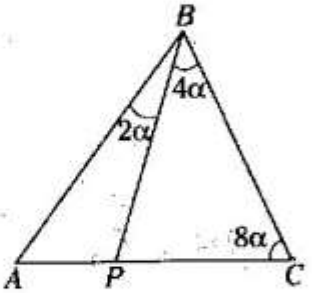
A) 20° B) 35° C) 30°
D) 55° E) 50°

12. En un triángulo ABC de base BC, se ubica P en la región interior, tal que $m\measuredangle BAP=10°$, $m\measuredangle PCB=30°$ y $m\measuredangle ABC=70°$. Calcule la $m\measuredangle ABP$.

A) 15° B) 20° C) 30°
D) 45° E) 60°

NIVEL INTERMEDIO

13. Del gráfico, $BP=AC$. Calcule α.



A) 5° B) 7° C) 9°
D) 10° E) 15°

14. En un triángulo ABC, recto en A, se ubica E en la región exterior relativa a AC, tal que EB interseca a AC en P. Si $PB=2(EP)$, $m\measuredangle CBE=m\measuredangle ABE$ y $m\measuredangle BEC=45°$, calcule $m\measuredangle ACB$

A) 37° B) 30° C) 45°
D) 60° E) 53°

15. En un triángulo ABC, recto en B, se traza la mediana CM y la ceviana AN en el triángulo AMC, tal que $3(NC)=2(MN)$. Si $m\measuredangle BAC=45°$, calcule $m\measuredangle NAC$.

A) 8° B) 14° C) 16°
D) 23° E) 37°/2

16. En un triángulo ABC equilátero se traza la altura BH, luego en el triángulo BHC se traza la bisectriz interior BL. Si se ubica P en BL, tal que $m\measuredangle APL=90°$, calcule $\frac{PH}{PB}$.

A) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$
D) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

17. En un triángulo ABC, se ubica P y M en la región interior y en BC, respectivamente, tal que $m\measuredangle BPM=2(m\measuredangle PCB)$; $m\measuredangle PAB=60°$; $m\measuredangle ABC=60°+m\measuredangle PCB$; $AB=AP=PC$; $PM=5$. Halle la sumatoria de valores enteros de BM.

A) 27 B) 30 C) 29
D) 31 E) 15

18. En un triángulo ABC, M es el punto medio de AC. Si $AB=3$ y $m\measuredangle ABM=3(m\measuredangle MBC)$, halle el máximo valor entero de BC.

A) 14 B) 4 C) 5
D) 8 E) 12

19. En un triángulo ABC, recto en B, se traza la altura BH y las bisectrices interiores BP y BQ de los triángulos ABH y BHC, respectivamente, tal que $PQ=8$. Halle la distancia del punto de intersección de las bisectrices de los ángulos agudos del triángulo ABC a BC.

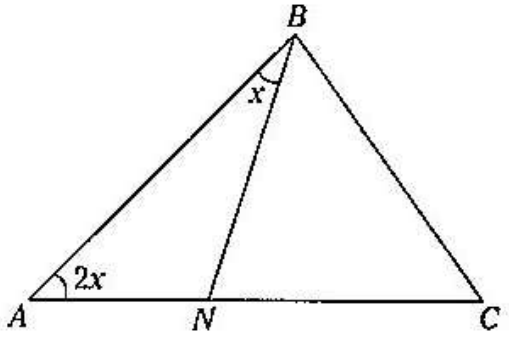
A) 8 B) 2 C) 4
D) 3 E) 6

20. En un triángulo equilátero ABC se ubica P en la región exterior relativa a $\overline{BC}$ y se trazan las perpendiculares $\overline{PR}$, $\overline{PT}$ y $\overline{PQ}$ relativas a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente. Las prolongaciones de $\overline{PT}$ y $\overline{BA}$ se intersecan en D, en la prolongación de $\overline{TD}$ se ubica H. Si HN y HM son perpendiculares a $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$,

calcule $\frac{2}{3}\frac{(HT-HN-HM)}{(PR+PQ-PT)}$.

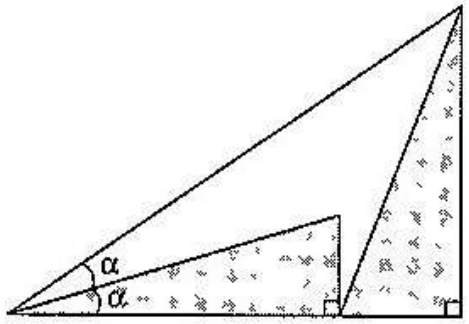
A) 1 B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{2}$
D) $\frac{1}{3}$ E) 2

21. Del gráfico, $AB=NC$ y $BN=BC$. Calcule x.



A) 9° B) 20° C) 10°
D) 15° E) 18°

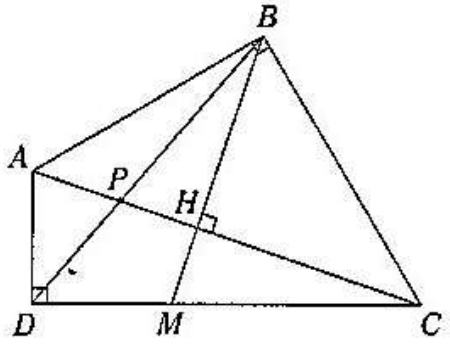
22. Del gráfico, las regiones sombreadas son congruentes. Calcule α.



A) 15° B) $\frac{37°}{2}$ C) $\frac{45°}{2}$

D) $\frac{53°}{2}$ E) 30°

23. En el gráfico, $m\measuredangle ADB = m\measuredangle NHC = 45°$ y $DH=MH$. Calcule $m\measuredangle DBM$.



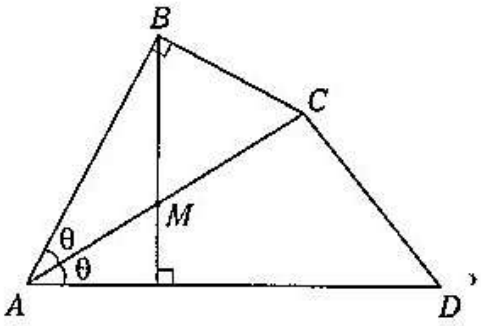
A) 15° B) 16° C) $\frac{37°}{2}$

D) $\frac{53°}{2}$ E) 30°

24. Se ubica P en la región interior del triángulo ABC de base BC, tal que $m\measuredangle CAP=5°$; $m\measuredangle PAB=15°$; $\sqrt{2}(PB)=(PA)(\sqrt{3}-1)$ y $AC=PA\sqrt{2}$. Calcule $m\measuredangle PBA$.

A) 18° B) 20° C) 10°
D) 15° E) 30°

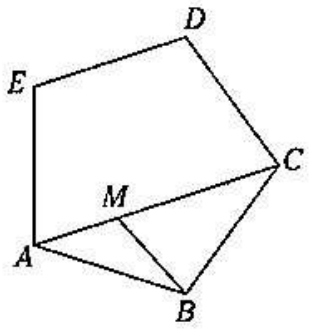
25. Determine $m\measuredangle ADC$ si $CD=2(BM)$.



A) 20° B) 30° C) 25°
D) 15° E) 10°

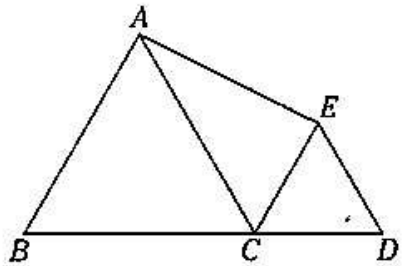
NIVEL BÁSICO

1. En el polígono equilátero *ABCDE*, de 65 cm de perímetro, se marca el punto *M* sobre la diagonal *AC*, de modo que *MC*=*BC* y *AM*=*MB*. El triángulo *BCM* tiene 34 cm de perímetro. ¿Cuál es el perímetro del triángulo *ABC*?



A) 45 cm B) 46 cm C) 47 cm
D) 48 cm E) 49 cm

2. En el gráfico, los dos polígonos regulares *ABC* y *ECD* tienen lados de longitudes 2 y 1, respectivamente. Halle el perímetro del polígono *ABDE*.



A) 8 B) $6+\sqrt{3}$ C) $4+2\sqrt{3}$
D) $9-\sqrt{3}$ E) $6+2\sqrt{3}$

3. Respecto a las siguientes proposiciones, indique verdadero (V) o falso (F).
   I. La diferencia entre el número de diagonales medias y el número de diagonales en un polígono es igual al número de lados de dicho polígono.
   II. Si el número de diagonales en un polígono es el doble del número de lados, entonces el número de diagonales medias es el triple del número de lados.
   III. En todo polígono equilátero, la suma de las medidas de los ángulos externos es 360°.

A) VVV B) FFV C) VVF
D) VFF E) FVV

4. Indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda en las siguientes proposiciones:
   I. Todo polígono tiene diagonales.
   II. En un polígono regular, las diagonales son de igual longitud.
   III. En todo polígono, la suma de las medidas de los ángulos externos es 360°.
   IV. El número de diagonales medias en un polígono siempre es mayor que el número de lados.

A) FFFV B) VVFV C) VVFF
D) FFFF E) VVVF

5. Indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda en las siguientes proposiciones:
   I. En un pentágono, el número de diagonales es igual al número de lados.
   II. En un polígono, el número de diagonales medias siempre es mayor que el número de diagonales.
   III. En un pentágono equilátero, la medida del ángulo exterior es 72°.

A) VVF B) FVF C) VFV
D) VVV E) FFV

. Si un polígono tiene $n-3$ lados, este tendría $n+4$ diagonales. ¿Qué polígono es?

A) cuadrilátero
B) pentágono
C) heptágono
D) decágono
E) dodecágono

. ¿Cuál es el polígono en el que se puede trazar 20 diagonales desde 6 vértices consecutivos?

A) nonágono
B) pentágono
C) octógono
D) decágono
E) dodecágono

3. En un polígono regular $ABCDEFGH...$ $\overline{CG} \cap \overline{AD}=\{P\}$ y $\overline{HC} \cap \overline{AE}=\{Q\}$. Calcule la $m\measuredangle APQ$ si el número de diagonales es $4n-5$, donde n representa el número de lados del polígono.

A) 30° B) 54° C) 64°
D) 75° E) 120°

9. En un polígono convexo, la suma de diagonales medias es $20n$, donde n representa el número de lados del polígono. Halle el menor número de ángulos interiores obtusos.

A) 3 B) 6 C) 12
D) 16 E) 19

10. Sea $ABCDEF$ un hexágono regular, en $\overline{CD}$ se ubica P y en la prolongación de $\overline{ED}$ los puntos M y S, respectivamente. Luego se traza la recta L que pasa por A y P que interseca al hexágono regular $MNPQRS$ y a la prolongación de $\overline{MS}$ en L y H, respectivamente. Si $AP=a$ y $PL=b$, calcule LH.

A) $\dfrac{b^2}{a+b}$ B) $\dfrac{a^2}{a+b}$ C) $\dfrac{b^2}{a-b}$

D) $\dfrac{b^2+a^2}{a+b}$ E) $\dfrac{b^2-a^2}{a+b}$

11. Se tienen los polígonos regulares y congruentes $ABCDEF$ y $AMNLTP$. Calcule la medida del ángulo que forman $\overline{BP}$ y $\overline{MF}$.

A) 15° B) 30° C) 45°
D) 60° E) 75°

12. En un polígono convexo de n lados, donde n es un número par, calcule el número de diagonales que se pueden trazar desde vértices no consecutivos del polígono dado.

A) $\dfrac{n(3n-10)}{8}$

B) $\dfrac{3(n-1)(n-3)}{8}$

C) $\dfrac{n(n-8)}{2}$

D) $\dfrac{n(n-5)}{8}$

E) $\dfrac{3n(n-8)}{8}$

13. ¿Cuántos triángulos rectángulos se pueden formar uniendo tres vértices de un polígono regular de 14 lados?

A) 72 B) 82 C) 84
D) 88 E) 90

14. Calcule el número de vértices de un polígono regular en donde la suma de sus ángulos interiores es igual a la séptima parte de la suma de los ángulos interiores del polígono regular de 16 lados.

A) 3 B) 4 C) 6
D) 7 E) 10

15. En un polígono regular *ABCD*... se tiene que $AD=2(CD)$. Calcule el número de diagonales medias.

A) 10 B) 15 C) 21
D) 28 E) 36

16. En un polígono equiángulo *ABCDEF*, se tiene que $AB=3(BC)=9$ y $CD=4(EF)=4$. Calcule $AF+ED$.

A) 17 B) 18 C) 21
D) 25 E) 30

17. Sea *ABCDEFGH* un octógono equiángulo, donde $BC=3(DC)=3$; $FG=2$ y $4\sqrt{2}=CD=4(AB)=\frac{4}{3}(EF)$.
Calcule la distancia de *H* a $\overline{CD}$.

A) $9\frac{\sqrt{2}}{5}$ B) $9\frac{\sqrt{3}}{5}$ C) $9\frac{\sqrt{2}}{2}$
D) $9\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $9\frac{\sqrt{3}}{5}$

18. En un triángulo equilátero *ABC* se ubican los puntos *M* y *N* en *AB*, *P* y *Q* en *BC*, *S* y *R* en *AC*, tal que estos puntos trisecan cada lado del triángulo equilátero; además, $\overline{MP}$ interseca a $\overline{NR}$ y $\overline{NQ}$ en *H* e *I*, respectivamente, $\overline{MS}$ interseca a $\overline{NR}$ y $\overline{RQ}$ en *T* y *L*, respectivamente, $\overline{PS}$ interseca a $\overline{NQ}$ y $\overline{RQ}$ en *J* y *K*, respectivamente, $AB=3$. Calcule el perímetro del polígono *MHNIPJQKSLRT*.

A) $3\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{3}$ C) $5\sqrt{3}$
D) $6\sqrt{3}$ E) $10\sqrt{3}$

19. En un polígono regular, al disminuir en 10° sus ángulos interiores, este resulta ser la medida del ángulo interior de otro polígono regular cuyo número de lados es $\frac{4}{3}$ del número de lados del primero disminuido en 12. Calcule el número de lados del polígono regular inicial.

A) 12 B) 15 C) 17
D) 18 E) 19

20. En un polígono equiángulo *MNLTPQR*..., las prolongaciones de $\overline{MN}$ y $\overline{RQ}$ forman un ángulo obtuso de 120°. Calcule el número de lados de dicho polígono.

A) 12 B) 15 C) 20
D) 25 E) 30

21. ¿Cuántos lados tiene el polígono regular cuyo ángulo interno es *p* veces el ángulo edterior (*p* es el perímetro) si se sabe que el número de diagonales es $\frac{3080}{39}p$?

A) 80 B) 85 C) 90
D) 95 E) 100

22. Sea *ABCD*... un polígono equilátero convexo. Se ubica *P* en la región interior del polígono tal que $m\measuredangle BCP=2m\measuredangle CAP=2m\measuredangle ABP$ y $m\measuredangle ABC=90°$. Calcule $m\measuredangle ABP$.

A) 15° B) 30° C) 45°
D) 60° E) 75°

23. Sean dos polígonos equiángulos, tal que la razón de sus ángulos exteriores es de 1 a 2, y la razón de sus ángulos interiores es de 5 a 4. Calcule el número de lados del polígono que posee el ángulo exterior menor.

A) 6 B) 12 C) 17
D) 18 E) 20

24. Sea *ABCDEF*... un polígono regular, donde las mediatrices relativas a $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$ cortan a estos segmentos en *M* y *N*, respectivamente; además, la intersección de las mediatrices es el punto *P*, y la razón entre el ángulo exterior y la m∢*MPN* es de 1 a 4. Calcule la suma de sus ángulos interiores.

A) 3240° B) 2880° C) 2800°
D) 2700° E) 1080°

25. En los polígonos regulares *ABCDE* y *MNLTK* se cumple que $\overline{MN} // \overline{BC}$ y $D \in \overrightarrow{MN}$. Calcule la medida del ángulo que forman $\overline{TN}$ y $\overline{BC}$.

A) 15° B) 36° C) 72°
D) 120° E) 150°

26. Sea un polígono regular cuyos ángulos interiores son medidas enteras en grados sexagesimales. ¿Cuántos polígonos cumplen dichos requisitos?

A) 12 B) 15 C) 17
D) 18 E) 22

27. Sea *ABCDEF*... un polígono regular donde m∢*BEF*=7(m∢*BED*). Calcule el número de diagonales de dicho polígono.

A) 142 B) 135 C) 125
D) 148 E) 140

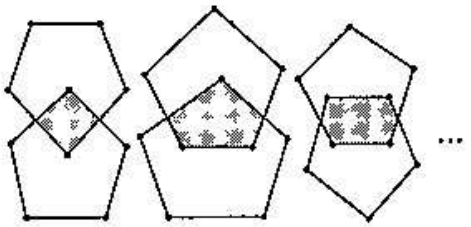
28. Sean los polígonos regulares *ABCD*... y *ABPQ*...; además, m∢*CBP*=6° y m∢*BCD*=150°. Halle la razón entre los perímetros de las regiones poligonales.

A) $\frac{6}{5}$ B) 2 C) $\frac{5}{4}$
D) $\frac{6}{7}$ E) 3

29. En un polígono *ABCDE*, *AE*=*ED*=5; m∢*ABC*=m∢*BCD*=m∢*AED*=90° y *BC*=7. Calcule la medida del ángulo determinado por $\overline{BC}$ y $\overline{ED}$.

A) 15° B) 30° C) 37°
D) 45° E) 53°

30. Dos regiones pentagonales convexas se intersecan determinando regiones poligonales como las sombreadas en el gráfico.

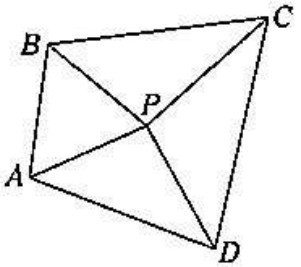


Calcule el número de diagonales del polígono que limita la región poligonal del máximo número de lados que se forma al intersecar dichas regiones.

A) 20 B) 27 C) 35
D) 44 E) 54

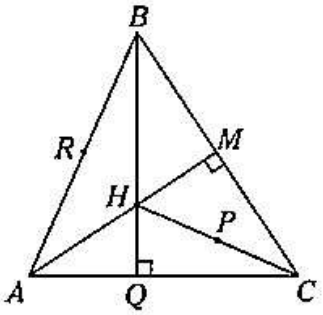
NIVEL BÁSICO

1. Del gráfico, $\overline{AP}$ y $\overline{DP}$ bisecan a los ángulos interiores correspondientes de $\square ABCD$; además, $AP=PB$, $DP=PC$, $AD=7$ y $\overline{AB}//\overline{CD}$. Halle $2P_{\square ABCD}$.



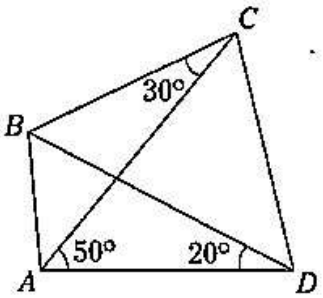
A) 14 B) $\frac{21}{2}$ C) 21
D) 28 E) $\frac{35}{2}$

2. De la gráfica, $AR=RB$, $HP=PC$. Calcule la medida del ángulo entre $\overline{MQ}$ y $\overline{PR}$.



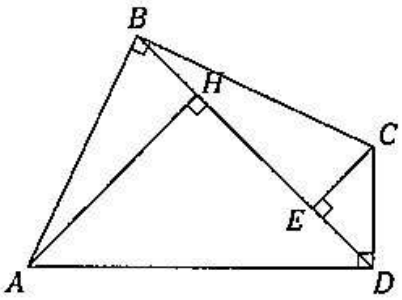
A) 30° B) 60° C) 90°
D) 120° E) 150°

3. En el $\square ABCD$, $AD=CD$. Determine $m\measuredangle ABD$.



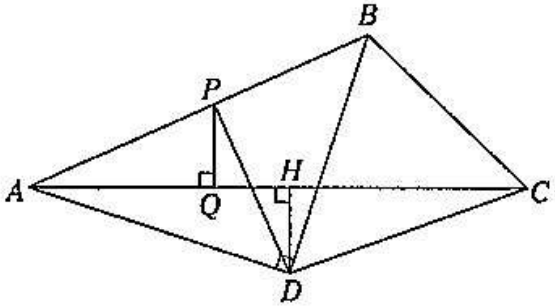
A) 15° B) 30° C) 45°
D) 60° E) 75°

4. Del gráfico, $m\measuredangle BAD=45°$, $AH=8$ y $CE=2$. Calcule BD.



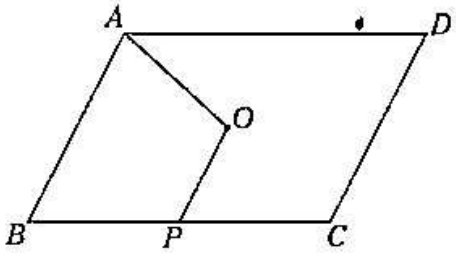
A) 6 B) 4 C) 10
D) 12 E) 5

5. Según el gráfico, $m\measuredangle ACB=45°$ y $AQ=DH$ y $AD=BD$. Si $AC=12$, calcule $PQ+PD$.



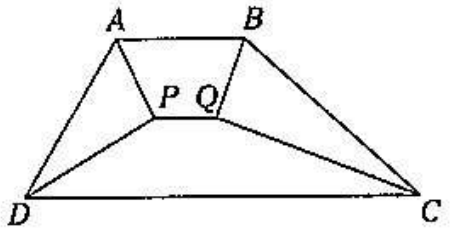
A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

6. Del gráfico, O es centro del paralelogramo $ABCD$, $ABPO$ es un trapecio isósceles y $m\measuredangle OAD=2m\measuredangle PAO$. Determine $m\measuredangle PAD$.



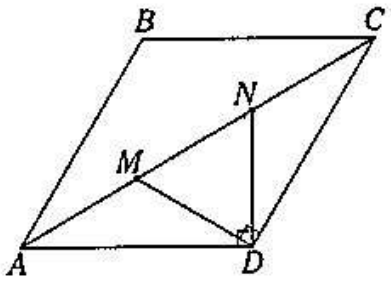
A) 15° B) 30° C) 45°
D) 60° E) 75°

En el trapecio $ABCD$, $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$, $\overline{CQ}$ y $\overline{DP}$ son bisectrices en sus vértices correspondientes del trapecio, además, $AB=4$, $BC=10$, $CD=12$ y $AD=4$. Halle PQ.



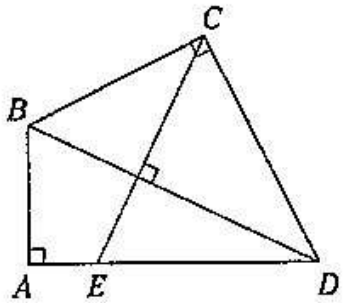
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Según el gráfico, $ABCD$ es un rombo, $AM=MN$ y $NC=2$. Calcule AB.



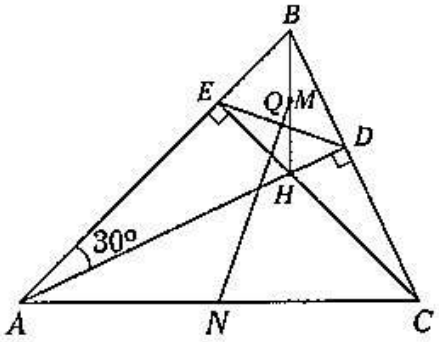
A) $2\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{3}$ C) 3
D) 2 E) $2\sqrt{2}$

En el gráfico siguiente, $BC=CD$ y $ED=2(AE)$. Calcule $m\measuredangle ADB$.



A) 15° B) 30° C) 37°
D) 45° E) 53°

10. En el gráfico siguiente, M y N representan el punto medio de BH y AC, respectivamente. Si $AE=24$ y $DC=10$, calcule QN.



A) 13,2 B) 15,13 C) 16,2
D) 18,3 E) 20,1

11. En un cuadrilátero $ABCD$ se traza $DH \perp AB$ y $\overline{BC} \perp \overleftrightarrow{CD}$. Si $AB=3$, $BC=2\sqrt{6}$, $CD=2\sqrt{2}$ y $AD=\sqrt{17}$, calcule AH.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

12. En un trapecio $ABCD$ ($BC // AD$), $AB=10$ y $CD=24$. Sean M y N puntos medios de las bases del trapecio. Si las bisectrices de los ángulos determinados por los lados laterales con la base mayor se intersecan en P y la $m\measuredangle APD=135°$, calcule MN.

A) 5 B) 10 C) 13
D) 15 E) 17

13. En un trapecio $ABCD$ recto en B y C, se traza el menor recorrido de A hacia D pasando por P ($P \in BC$). Si $AB=5$, $BC=12$ y $CD=10$, calcule la longitud del perímetro de la región APD.

A) $12+2\sqrt{41}$ B) $13+3\sqrt{41}$ C) $14+3\sqrt{41}$
D) $13+3\sqrt{51}$ E) $13+3\sqrt{2}$

14. En un trapecio isósceles $ABCD$ ($AD//BC$) de bases 8 y 18, se trazan las bisectrices interiores que se cortan en P. Calcule la distancia de P hacia AB.

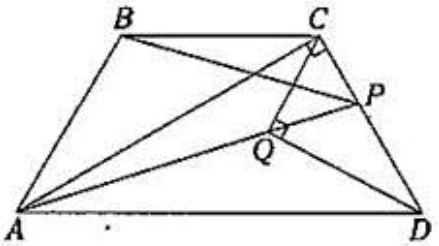
A) 6 B) 9 C) 10
D) 12 E) 13

NIVEL INTERMEDIO

15. En un cuadrado $ABCD$ se ubican los puntos medios M, N y P de AB, CD y AD, respectivamente. Si $MC \cap BP = F$ y $FD \cap AN = E$, calcule $m\measuredangle NED$.

A) 15° B) $\frac{53°}{2}$ C) $\frac{143°}{2}$
D) $\frac{127°}{2}$ E) 30°

16. En el trapecio isósceles $ABCD$, $m\measuredangle CAD = m\measuredangle PBC = m\measuredangle ACQ = m\measuredangle BAC$, $PD = 2(CP)$ y $AQ = 6$. Calcule PQ.

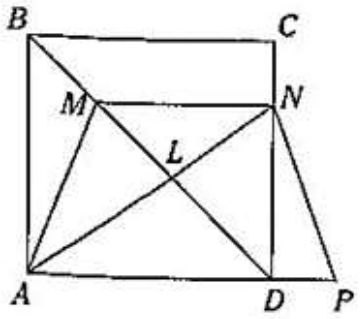


A) 2 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

17. En un rombo $ABCD$ se ubican P y Q en AC y BC, respectivamente, tal que $m\measuredangle PDQ = 90°$. Si $AP = PD = DQ$, calcule la $m\measuredangle BAD$.

A) 10° B) 15° C) 18°
D) 30° E) 60°

18. Del gráfico, $ABCD$ es un cuadrado y $AMNP$ es un trapecio isósceles, donde $AN = AP$. Calcule la $m\measuredangle NLD$.



A) 37° B) 53° C) 60°
D) 75° E) 82°

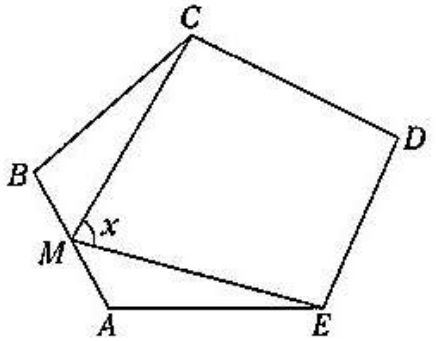
19. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
I. Si en un trapecio las diagonales son congruentes, el trapecio es isósceles.
II. En un trapecio, la diagonal puede ser igual a la altura.
III. Si dos trapecios isósceles tienen diagonales congruentes, dichos trapecios son congruentes.

A) VVV B) VFV C) VFF
D) FFF E) VVF

20. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
I. Si en un cuadrilátero dos ángulos opuestos interiores son iguales a 90° y la diagonal que los une biseca uno de sus ángulos rectos y la otra diagonal pasa por el punto medio de la primera, este cuadrilátero será un cuadrado.
II. Si en un trapecio isósceles la altura es igual a una base y una diagonal es igual a la otra base, las diagonales forman un ángulo de 74°.
III. Si en un cuadrado $ABCD$, M y N son puntos medios de BC y CD, respectivamente, entonces AM será perpendicular a BN.

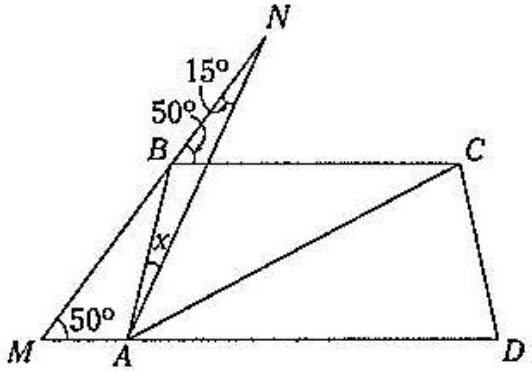
A) FFF B) FVV C) FFV
D) VVF E) VVV

1. En el gráfico, $BC=DE$, $AE=CD$, $BM=MA$ y la $m\measuredangle BCD+m\measuredangle AED=180°$. Calcule x.



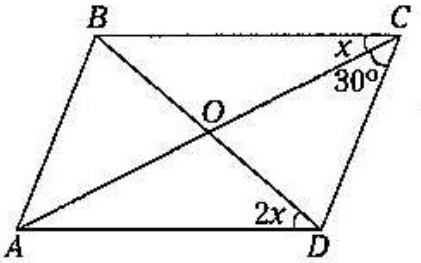
A) 60° B) 30° C) 15°
D) 45° E) 90°

2. En el gráfico, $MN=AC=AD$ y $AB=CD$. Calcule x.



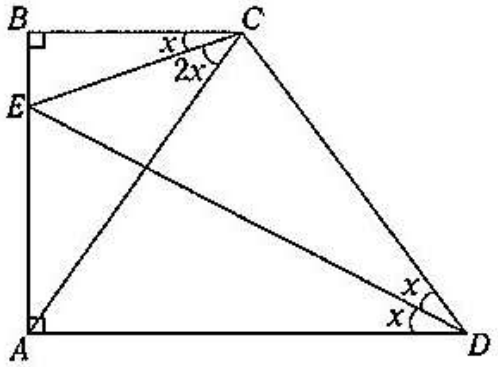
A) 5° B) 10° C) 15°
D) 20° E) 30°

3. En el gráfico, $AB=CD$ y $AB // CD$. Calcule x.



A) 12° B) 30° C) 5°
D) 10° E) 8°

24. Del gráfico, calcule x.

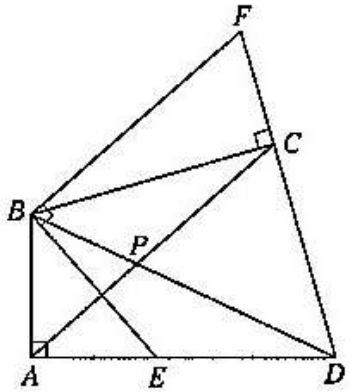


A) 5° B) 10° C) 15°
D) 20° E) 25°

25. En las bases BC y AD de un trapecio $ABCD$, se ubican los puntos P y Q, respectivamente, tal que $PB=PC=2$, $AQ=3$, $QD=9$, $PQ=5$ y $AB \perp CD$. Calcule la $m\measuredangle PQD$.

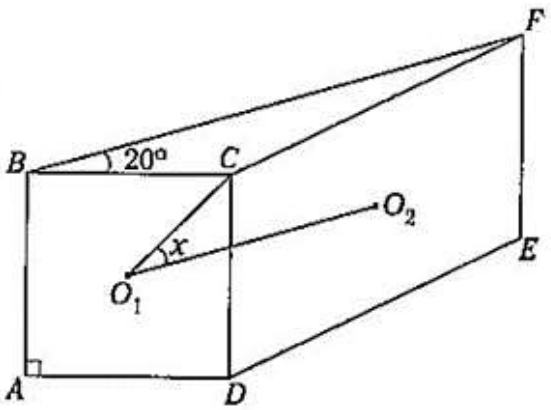
A) 30° B) 53° C) 45°
D) 37° E) 60°

26. Del gráfico, $m\measuredangle BAC=m\measuredangle CAD$, $AP=PC$, $BE=20$ y $CD=16$. Halle CF.



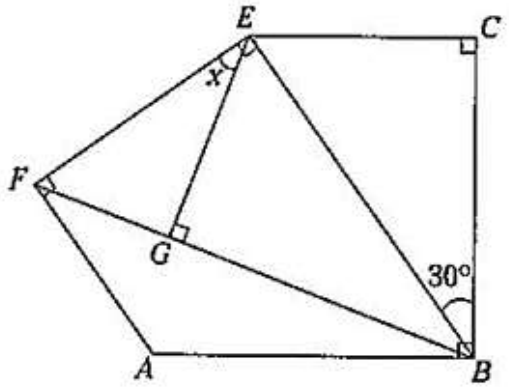
A) 6 B) 8 C) 12
D) 14 E) 15

27. Según el gráfico, $ABCD$ y $DCFE$ son paralelogramos de centros O_1 y O_2, respectivamente, además, $AB=AD$. Calcule x.



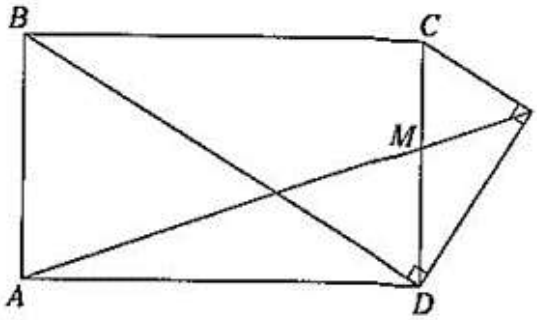
A) 35° B) 30° C) 20°
D) 40° E) 25°

28. En el gráfico, $AB=BC$. Calcule x.



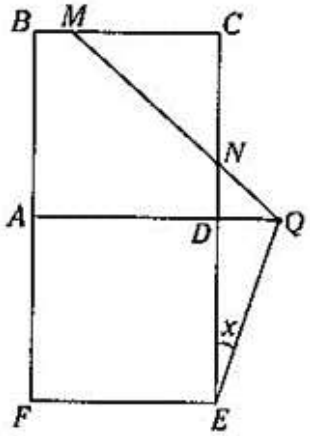
A) 45° B) 60° C) 53°
D) 30° E) 37°

29. En el gráfico, $ABCD$ es un rectángulo y $CM=MD=2$. Calcule AD.



A) $2\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) $5\sqrt{2}$
D) $3\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

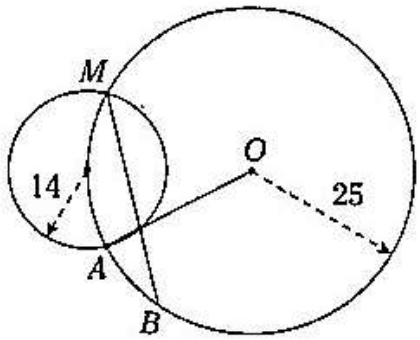
30. En el gráfico, $ABCD$ y $ADEF$ son cuadrados y $AM=MN=QE$. Calcule x.



A) 18°30' B) 18° C) 15°
D) 10° E) 22°30'

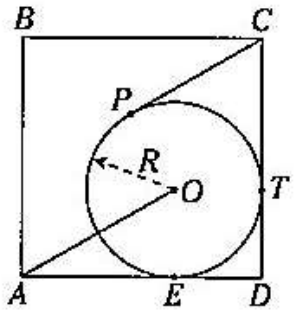
NIVEL BÁSICO

1. Del gráfico, calcule la medida del arco AB.



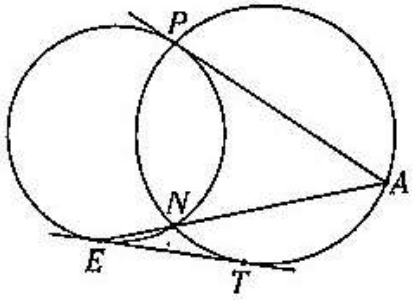
A) 7° B) 14° C) 16°
D) 32° E) 37°

2. En el cuadrado $ABCD$, T, E y P son puntos de tangencia, $\overline{PC}//\overline{AO}$. Determine m$\measuredangle PAO$.



A) 15° B) 30° C) 45°
D) 53°/2 E) 60°

3. Del gráfico, la medida del arco PE es 210°, P, E y T son puntos de tangencia. Calcule la medida del arco TA.

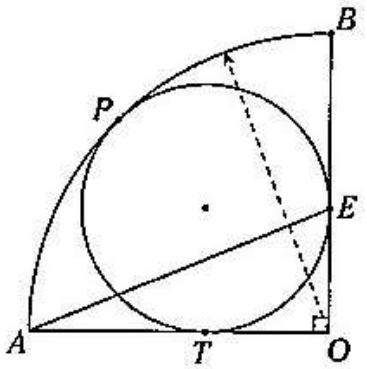


A) 30° B) 45° C) 60°
D) 75° E) 90°

4. En un cuadrado $ABCD$, se ubica P y Q en BC y AD, respectivamente; luego, se traza interiormente las semicircunferencias de diámetro BP y DQ, y se traza la recta tangente común interior a estas en G y T, respectivamente. Si $BEDT$ es un rombo, calcule la m$\measuredangle TDE$.

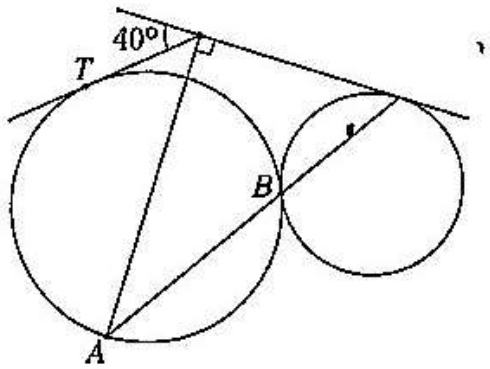
A) 15° B) 30° C) 45°
D) 60° E) 75°

5. Del gráfico siguiente, T, E y P son puntos de tangencia. Calcule la m$\measuredangle AEO$.



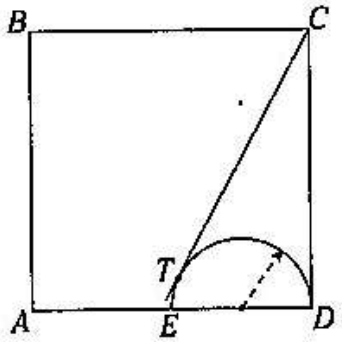
A) 67°30 B) 75° C) 80°
D) 72°30 E) 65°

6. Del gráfico, T y B son puntos de tangencia. Si la m$\widehat{TA}$ − m$\widehat{TB}$ = 60°, calcule la m$\widehat{AB}$.



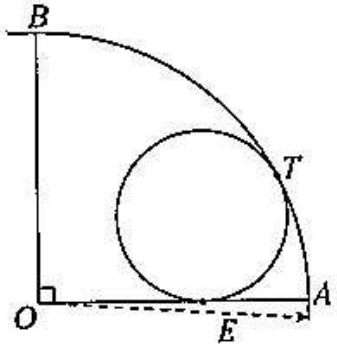
A) 100° B) 120° C) 140°
D) 130° E) 150°

En el cuadrado $ABCD$ del gráfico, $AE=ED$ y T es punto de tangencia. Halle $m\widehat{ET}$.



A) 30° B) 28° C) 14°
D) 8° E) 15°

Del gráfico, T y E son puntos de tangencia. Si $m\widehat{AT}=40°$, halle $m\measuredangle ABE$.



A) 10° B) 20° C) 30°
D) 45° E) 67°

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

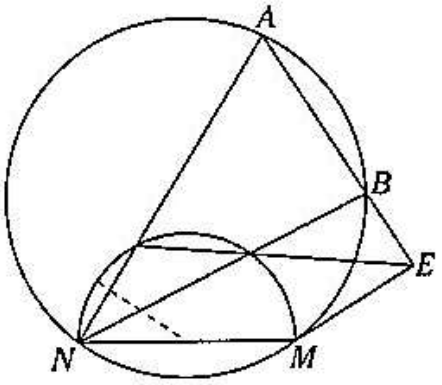
I. En una semicircunferencia de diámetro AB, en la prolongación de esta se ubica el punto H. Si la $m\measuredangle PHB=90°$ ($Q \in \overline{PH}$), además, AP y AQ intersecan a la semicircunferencia en M y N, respectivamente, el cuadrilátero $MNQP$ es inscriptible.

II. Si en un cuadrilátero $ABCD$ se trazan sus bisectrices interiores, el cuadrilátero formado por esta bisectrices es inscriptible.

III. Sea el cuadrado $ABCD$ y el rombo $MBCE$ ($E \in$ a la región interior del cuadrado), prolongamos BE que corta a la diagonal en L. El cuadrilátero $LEDC$ es inscriptible.

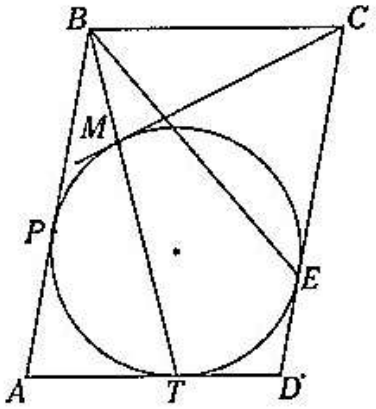
A) VVF B) VFV C) VFF
D) VVV E) FFF

10. Del gráfico, calcule la $m\measuredangle AEM$.



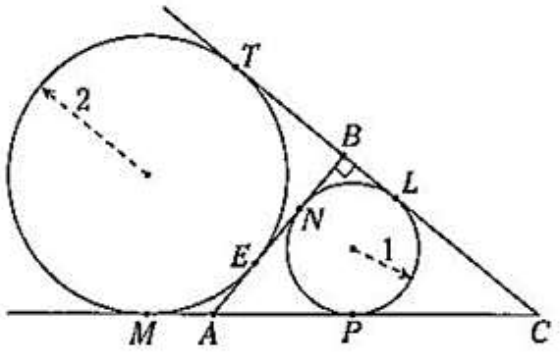
A) 60° B) 90° C) 120°
D) 150° E) 160°

11. Sea $ABCD$ un romboide, donde P, M E y T son puntos de tangencia y la medida del arco PM es 40°. Calcule la $m\measuredangle TBE$.



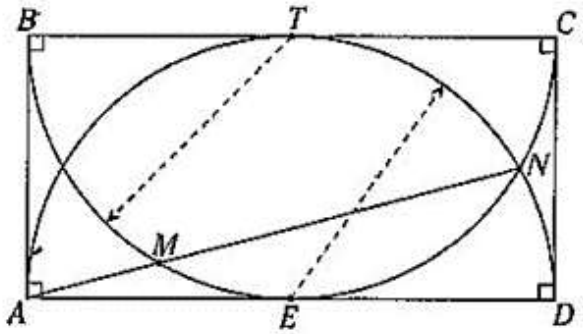
A) 20° B) 40° C) 10°
D) 5° E) 15°

12. Del gráfico, T, E, M, N, L y P son puntos de tangencia. Calcule la m$\measuredangle BCA$.



A) 30° B) 15° C) 37°
D) 16° E) 8°

13. Del gráfico, T y E son puntos de tangencia. Calcule la medida del arco MEN.



A) 60° B) 75° C) 90°
D) 120° E) 150°

NIVEL INTERMEDIO

14. Se tiene dos circunferencias tangentes exteriores, siendo la razón de radios de 1 a 4. Calcule la medida del ángulo formado por las tangentes comunes exteriores a las circunferencias mencionadas.

A) 30° B) 37° C) 53°
D) 60° E) 74°

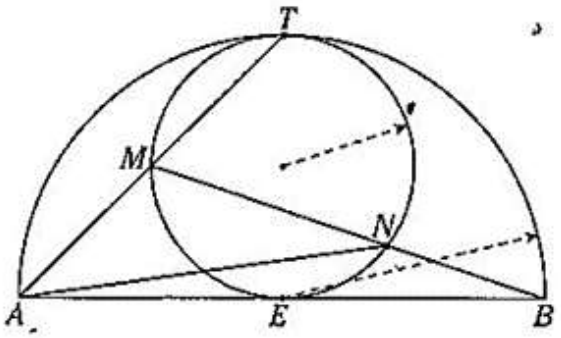
15. En una semicircunferencia de diámetro AB se traza interiormente la semicircunferencia de diámetro AN ($N \in \overline{AB}$). Luego trazamos el segmento tangente BT, que corta a la semicircunferencia mayor en P. (T punto de tangencia), la recta AT corta a la semicircunferencia mayor en M. Calcule la medida del menor arco determinado por $\overline{PA}$ en la semicircunferencia menor, sabiendo además que $4AT=3AM$.

A) 30° B) 60° C) 74°
D) 106° E) 120°

16. En un cuadrado $ABCD$ se trazan los cuadrantes $\widehat{BD}$ y $\widehat{AC}$ de centros A y D, respectivamente, que se intersecan en E. Luego se traza la circunferencia inscrita en el triángulo mixtilíneo AED, que es tangente a los arcos en P y Q. Calcule la m$\widehat{PQ}$.

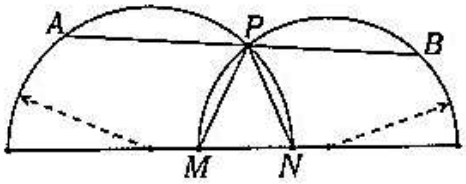
A) 60° B) 74° C) 106°
D) 120° E) 150°

17. Del gráfico, T y E son puntos de tangencia. Calcule la m$\measuredangle MAN$.



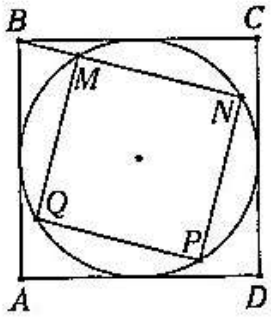
A) 30° B) 37° C) 53°
D) 60° E) 74°

8. Del gráfico, la $m\widehat{AP}+m\widehat{PB}=140°$. Calcule la $m\measuredangle MPN$.



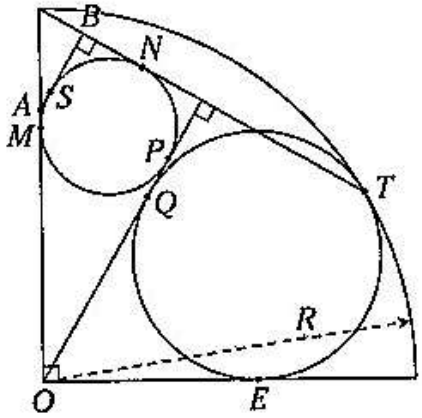
A) 30° B) 40° C) 55°
D) 50° E) 60°

9. En el gráfico, la circunferencia está inscrita, además, *ABCD* y *MNPQ* son cuadrados. Calcule la $m\measuredangle CBM$.



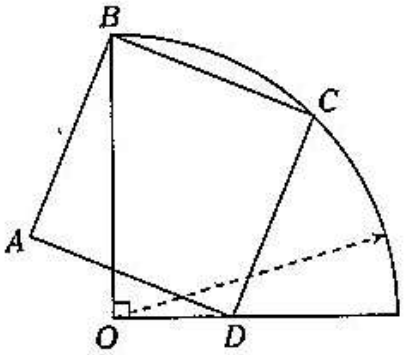
A) 15° B) $\frac{37°}{2}$ C) $\frac{45°}{2}$
D) $\frac{53°}{2}$ E) 30°

20. Del gráfico, *M*, *S*, *N*, *P*, *Q*, *T* y *E* son puntos de tangencia. Si $R=2$, calcule $AO-AB$.



A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

21. Del gráfico, *ABCD* es un cuadrado. Calcule la $m\measuredangle ABO$.

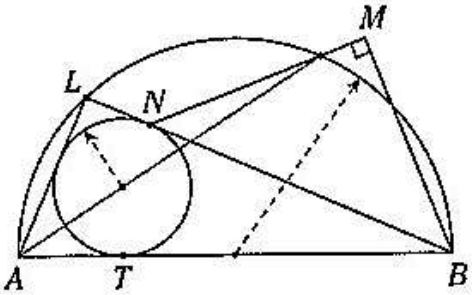


A) 15° B) $\frac{37°}{2}$ C) $\frac{45°}{2}$
D) $\frac{53°}{2}$ E) 30°

22. Se tiene una circunferencia inscrita en el triángulo *AOC*, tangente en los puntos *T*, *E* y *M* a los lados *AC*, *OC* y *AO*, respectivamente. Si *PT* es diámetro de dicha circunferencia, la recta *PE* interseca la recta *MT* en *I*, además, la $m\widehat{MP}=10°$, calcule la $m\measuredangle IOM$.

A) 10° B) 20° C) 30°
D) 45° E) 50°

23. Del gráfico se observa que la circunferencia está inscrita en el triángulo *ALB*. Si $TB=2\sqrt{2}$, calcule el radio de la circunferencia inscrita al triángulo *MNB*.



A) $\sqrt{2}-1$ B) $2-\sqrt{2}$ C) 1
D) $\frac{1}{2}$ E) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

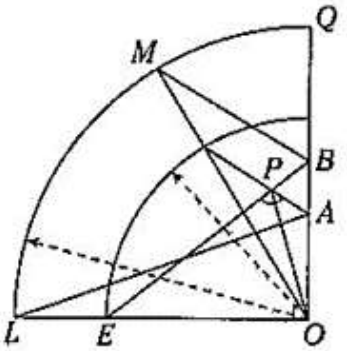
24. Se tiene dos circunferencias, $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$, secantes en A y B. En la prolongación de BA se ubica P, tal que se traza la tangente PT a $\mathscr{C}_1$; luego, BT y PN cortan a $\mathscr{C}_2$ en N y M, respectivamente. Calcule la $m\measuredangle TMP + m\measuredangle TAB$.

A) 100° B) 120° C) 150°
D) 160° E) 180°

25. Sean $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ circunferencias secantes en A y B. Se ubica un punto exterior S a las circunferencias y se traza una tangente común exterior a a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ en T y E, respectivamente, así como la secante a las dos circunferencias en N y M, respectivamente, que contiene al punto A. Si BN y AT se intersecan en P ($P \in \mathscr{C}_2$), BM y AE se intersecan en Q ($Q \in \mathscr{C}_1$), calcule la $m\measuredangle AE$.

A) 15° B) 30° C) 36°
D) 37° E) 40°

26. Del gráfico, la $m\measuredangle MBQ = m\measuredangle EBO$ y la $m\measuredangle PAQ = m\measuredangle LAO$. Calcule $\dfrac{m\measuredangle EPO}{m\measuredangle APO}$.

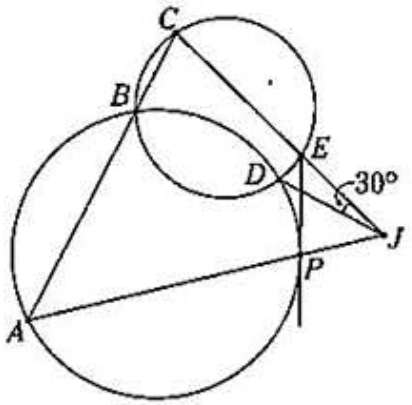


A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

27. Dado un cuadrante AOB de centro O y una circunferencia tangente a OB en B, que interseca a dicho cuadrante en C, tal que la prolongación de AC interseca a la circunferencia en E. Además, OE interseca a la circunferencia y al cuadrante en G y F, respectivamente. Calcule la $m\widehat{GB}$ si $m\widehat{BF} = 18°$.

A) 53° B) 54° C) 60°
D) 65° E) 75°

28. Según el gráfico, la $m\widehat{AP} = 140°$ y P es punto de tangencia. Calcule la medida del arco DEC.



A) 155° B) 160° C) 150°
D) 170° E) 165°

29. En una semicircunferencia de diámetro AB, se ubican los puntos P y Q, tal que la $m\widehat{AP} = 90°$ y $\overline{AQ}$ interseca a $\overline{PB}$ en M. En $\overline{AB}$ se ubica el punto L, tal que la $m\measuredangle AQL = 45°$ y $AM = 2(LB)$. Calcule la $m\measuredangle PAM$.

A) 14° B) 16° C) 19°
D) 15° E) 18°

30. En el lado AD de un cuadrilátero $ABCD$, se ubican los puntos M, N y T ($M \in \overline{AN}$ y $T \in \overline{ND}$), tal que BM y CT son perpendiculares a AD. Si $m\measuredangle NBC = m\measuredangle NDC$, $m\measuredangle NCB = m\measuredangle BAD$ y $AD = 8$, calcule TM.

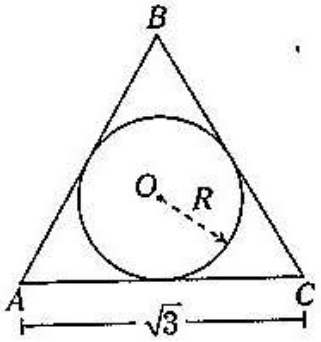
A) 5 B) 3,5 C) 4,5
D) 3 E) 4

PROBLEMAS PROPUESTOS

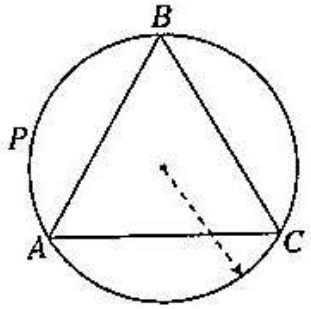
NIVEL BÁSICO

Del $\triangle ABC$ equilátero, halle R.

A) 1
B) 2
C) $\sqrt{3}$
D) 0,5
E) 1,2



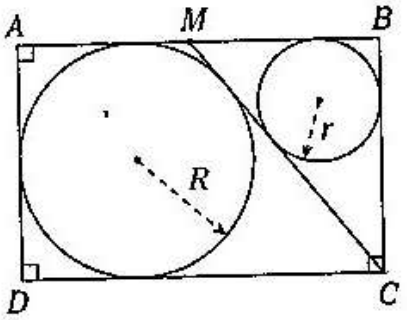
En el gráfico, el $\triangle ABC$ es equilátero. Calcule PC si $PA=a$ y $PB=b$.



A) $a+b$ B) $a-b$ C) $\frac{a+b}{2}$

D) $\frac{a-b}{2}$ E) $\frac{2(a+b)}{3}$

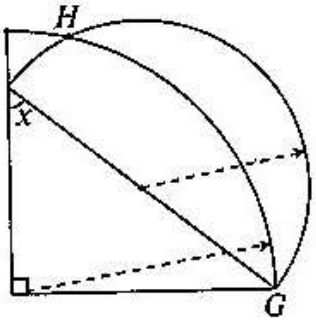
En el rectángulo $ABCD$, calcule la longitud de AM.



A) $R+r$ B) $2R-r$ C) $\frac{R+r}{2}$

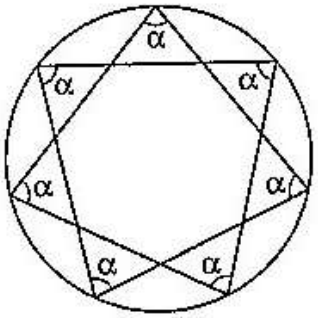
D) $\frac{R-r}{2}$ E) $\frac{2(R+r)}{3}$

4. Del gráfico, calcule x si se sabe que la medida del arco HG es 140°.



A) 70° B) 35° C) 60°
D) 65° E) 55°

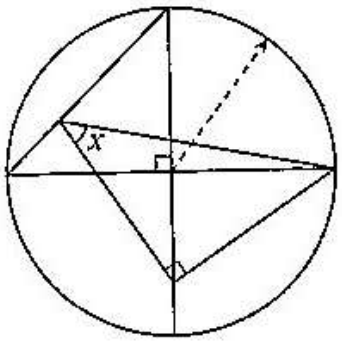
5. Del gráfico, calcule el valor de α.



A) $\frac{540°}{7}$ B) $\frac{360°}{7}$ C) 45°

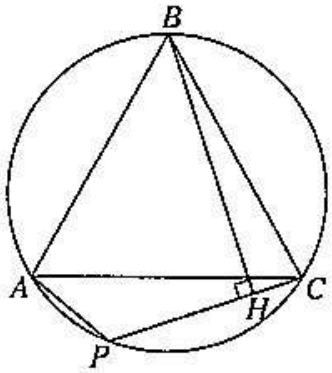
D) 30° E) 77°

6. En el gráfico, calcule el valor de x.



A) 90° B) 60° C) 45°
D) 30° E) 75°

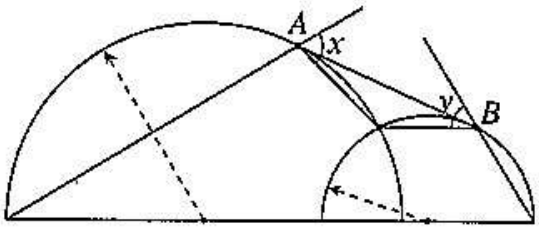
7. En el gráfico, $PA=a$ y $PC=b$ $(b>a)$. Calcule PH si $AB=BC$.



A) $a+b$ B) $a-b$ C) $\frac{a+b}{2}$

D) $\frac{a-b}{2}$ E) $\frac{2(a+b)}{3}$

8. En el gráfico se muestran dos circunferencias ortogonales. Si A y B son puntos de tangencia, calcule $x+y$.



A) 90° B) 100° C) 120°
D) 135° E) 75°

9. En un cuadrante AB de centro O, interiormente se grafica una circunferencia de diámetro OB y otra circunferencia inscrita en el triángulo mixtilíneo AOB, tangente en P, Q y R al lado AO y a los arcos AB y OB, respectivamente. Entonces el segmento QR siempre es

A) perpendicular al segmento AO.
B) paralelo al segmento AO.
C) congruente al segmento AO.
D) la mitad del segmento AO.
E) el doble del segmento AO.

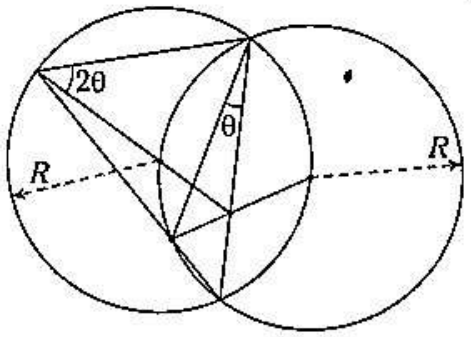
10. Sea ABC un triángulo acutángulo y O su circuncentro. Sea S la circunferencia trazada por A, B, O. Si las líneas CA y CB intersecan a S en los puntos P y Q, respectivamente, calcule la medida del ángulo que forman CO y PQ.

A) 90° B) 75° C) 60°
D) 45° E) 30°

11. Sea AB un segmento con punto medio M. Sobre la mediatriz de AB se toma un punto O, tal que $OM=AM$. Sea C una circunferencia de centro O y radio menor que OM. Por A se traza la recta AP tangente a C en P y que no corta al segmento OM. Por B se traza la recta BQ tangente a C en Q y que corta al segmento OM. Calcule la medida del ángulo que forman AP y BQ.

A) 30° B) 45° C) 60°
D) 75° E) 90°

12. Del gráfico, calcule θ.



A) 10° B) 15° C) 20°
D) 22° E) 25°

NIVEL INTERMEDIO

En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la altura BH. En AB y BC se ubican los puntos M y N, respectivamente, de manera que $AMNH$ es un rombo de centro O. Calcule la medida del ángulo BOC.

A) 45° B) 60° C) 90°
D) 30° E) 75°

. Considere el cuadrado $ABCD$. En AB se ubica el punto E y se traza la diagonal AC que interseca a ED en P. Por P se traza la perpendicular a ED que interseca a BC en F. Calcule EF si $AE+FC=8$.

A) 4 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

5. En un cuadrilátero inscriptible $ABCD$, $AB=BC=a$, $CD=b$ y $AD=a+b$. Calcule la $m\measuredangle BCD$.

A) 90° B) 60° C) 135°
D) 120° E) 100°

6. Dos cuadrados $ABCD$ y $DEFG$ descansan sobre una recta que contiene A, D y G. Además, E pertenece al lado CD. La recta GE interseca a BF en M. Calcule la medida del ángulo CMG.

A) 90° B) 60° C) 45°
D) 30° E) 75°

17. Desde el punto M exterior a una circunferencia Ω se trazan las tangentes MA y MB (A y B puntos de tangencia). En la prolongación de AB se ubica el punto N desde el cual se traza la tangente NC (C punto de tangencia). Calcule la medida del ángulo determinado por ON y CM si O es centro de Ω.

A) 90° B) 60° C) 45°
D) 30° E) 75°

18. Tres de las diagonales de un polígono regular forman un triángulo equilátero. Determine la suma de los ángulos internos si se sabe que la medida de su ángulo interno es mayor que 140° pero menor que 156°.

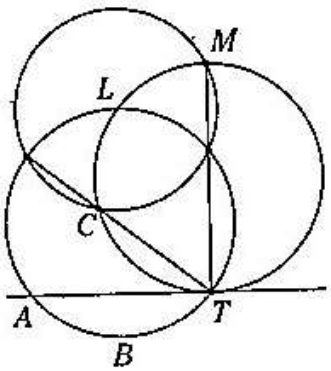
A) 1440° B) 1620° C) 1800°
D) 1980° E) 2160°

19. Se sabe que $\mathscr{C}$ es una circunferencia con diámetro AB y P es un punto exterior a C. Se trazan los segmentos PA y PB, tal que la prolongación de PB corta a la circunferencia en C. Si el ángulo APC mide 25°, calcule la medida del ángulo CAP.

A) 53° B) 65° C) 45°
D) 37° E) 55°

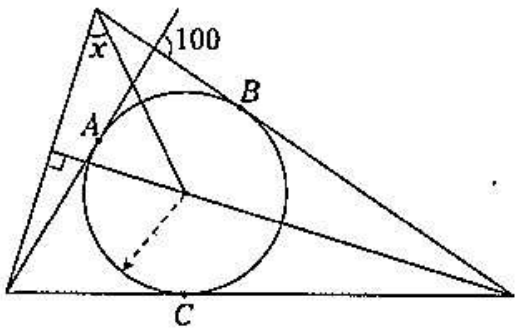
20. Halle la $m\widehat{ABT}$ si se sabe que

$$m\widehat{CLM}=2(m\widehat{CT})=120°$$



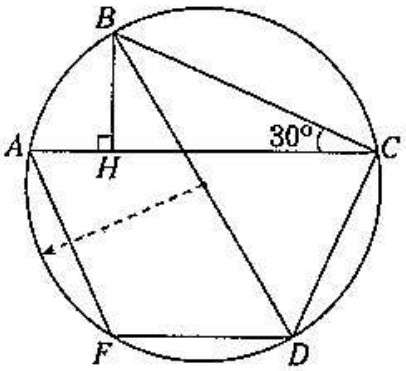
A) 180° B) 150° C) 160°
D) 120° E) 135°

21. Halle x si A, B y C son puntos de tangencia.



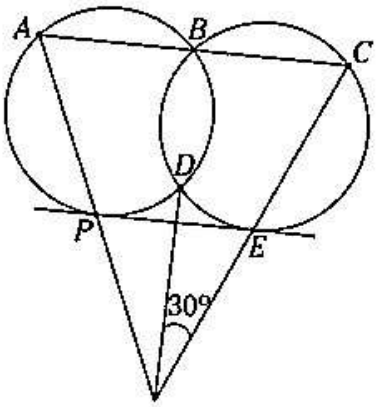
A) 60° B) 45° C) 37°
D) 53° E) 40°

22. Si $\overline{AC} // \overline{FD}$ y $AH=2$, halle la distancia del punto D hacia $\overline{AC}$.



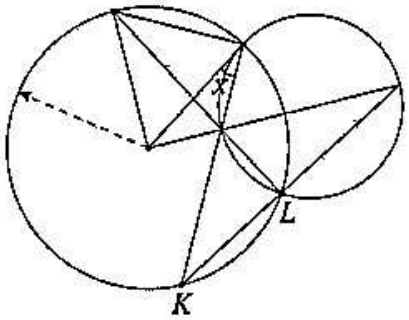
A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$
D) $4\sqrt{3}$ E) $\sqrt{6}$

23. Calcule la $m\widehat{DEC}$ si $m\widehat{AP}=140°$ y P y E son puntos de tangencia.



A) 155° B) 160° C) 150°
D) 170° E) 165°

24. En el gráfico se muestran dos circunferencias ortogonales. Si la medida del arco KL es 50°, calcule x.



A) 10° B) 20° C) 25°
D) 30° E) 40°

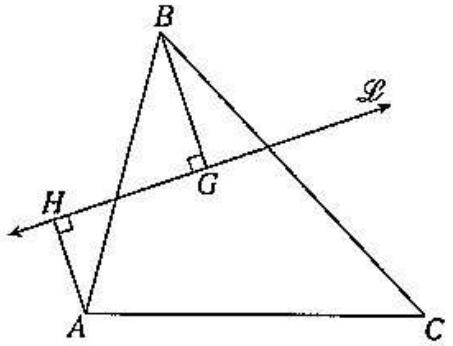
25. En el triángulo isósceles ABC ($AB=BC$), CD es la bisectriz del ángulo ACB. La perpendicular a CD trazada por el circuncentro de ABC interseca a BC en E. La paralela a CD trazada por E interseca a AB en F. Calcule BE si $FD=10$.

A) 5 B) 6 C) 8
D) 10 E) 15

PROBLEMAS PROPUESTOS

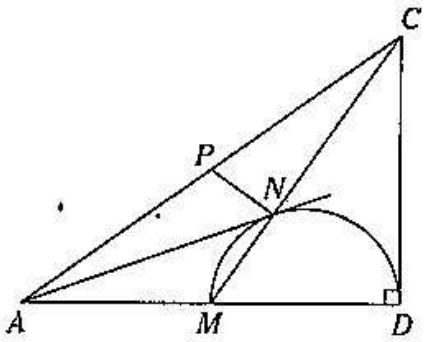
NIVEL BÁSICO

1. En el gráfico, $7(BG)=25(HG)=175(AH)$; además, G es el baricentro del triángulo ABC. Calcule la $m\measuredangle AGC$.



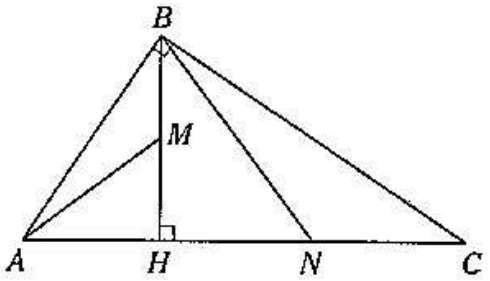
A) 76° B) 88° C) 90°
D) 98° E) 104°

2. En el gráfico, $AP=PC$; $AM=MD$ y $NP=1$. Halle el circunradio del triángulo ADC.



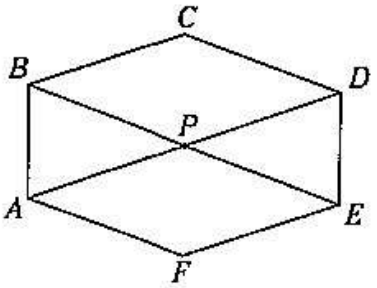
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

3. Del gráfico, $BM=MH$; $HN=NC$ y $m\measuredangle MAH=\theta$. Calcule la $m\measuredangle BNA$.



A) 2θ B) $\frac{90°-\theta}{2}$ C) $90°-\theta$
D) $\frac{3\theta}{2}$ E) $\frac{45°-\theta}{2}$

4. Del gráfico se tiene que $AP=FE=BC$; $AF=PE$ y $FE//BC$. ¿Qué punto notable es P en el triángulo ACE?

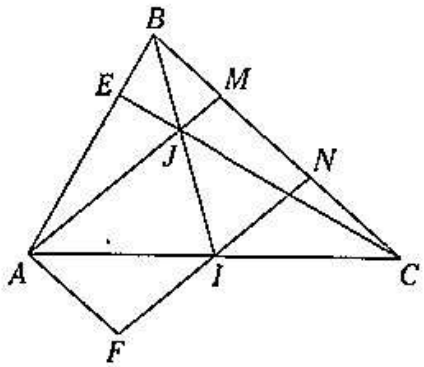


A) baricentro B) ortocentro C) incentro
D) circuncentro E) excentro

5. En un triángulo ABC se traza su triángulo mediano MNL. Calcule la razón entre la suma de las medianas del triángulo ABC y la suma de las medianas del triángulo MNL.

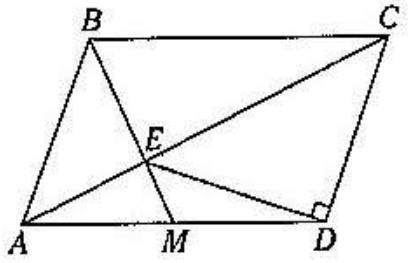
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

6. Del gráfico, $AMNL$ es un paralelogramo; además, $NI=JI$; $3(BM)=2(MN)$; $AE=3$ y $BE=1$. ¿Qué punto notable es la intersección de MI con AN del triángulo AMC?



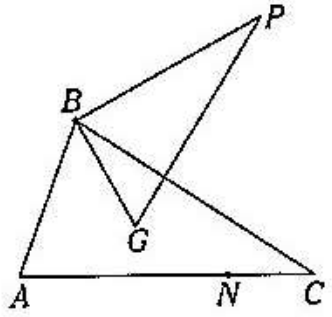
A) baricentro B) ortocentro C) incentro
D) circuncentro E) excentro

Se tiene el paralelogramo $ABCD$, donde $AM=MD$ y $ED=DC$. Determine la $m\measuredangle AEB$.



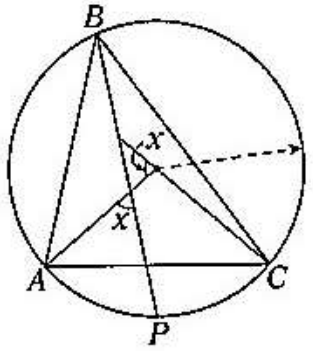
A) 75° B) 90° C) 105°
D) 120° E) 135°

Del gráfico, G es baricentro de triángulo ABC; además, $m\measuredangle PBG=90°$; $m\measuredangle BPG=\frac{53°}{2}$; $BP=8$ y $AN=3(NC)$. Calcule la distancia de N al punto medio de PC.



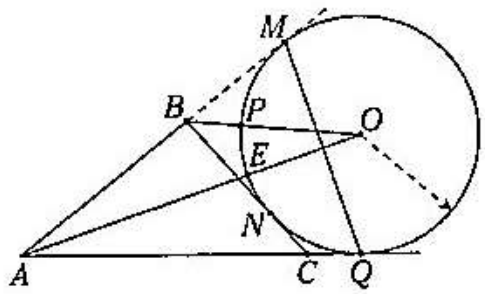
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Del gráfico, la $m\widehat{AB}=140°$. Calcule x si $m\widehat{AP}=m\widehat{PC}$.



A) 32° B) 42° C) 52°
D) 62° E) 58°

10. Del gráfico, M, N y Q son puntos de tangencia. Calcule $m\widehat{PE}/m\widehat{NQ}$.



A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

11. En un cuadrado $ABCD$ se traza la semicircunferencia de diámetro $\overline{AD}$, luego trazamos $\overline{CQ}$ tangente a la semicircunferencia en T ($Q\in\overline{AB}$). Si I_1 e I_2 son incentros de los triángulos BCQ y TCD, respectivamente, calcule la $m\measuredangle I_1TI_2$.

A) 76°23' B) 76°32' C) 76°75'
D) 78°23' E) 78°45'

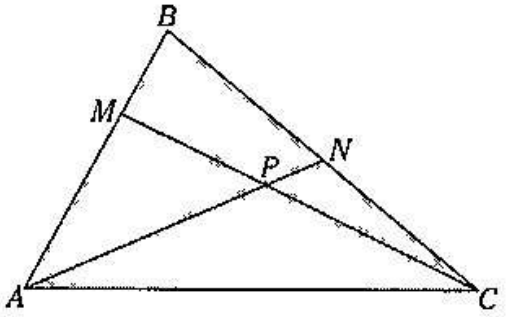
12. En el triángulo PBQ, recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$ y en ella se ubican E y N ($E\in\overline{NB}$). Se trazan los rombos $AMBN$ y $CLBE$ tal que M, A, L y C pertenecen a $\overline{PB}$, $\overline{PH}$, $\overline{BQ}$ y $\overline{HQ}$, respectivamente. ¿Qué punto notable es la intersección de $\overleftrightarrow{EL}$ y $\overleftrightarrow{MN}$ del triángulo ABC?

A) baricentro B) ortocentro C) incentro
D) circuncentro E) excentro

13. En un triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores $\overline{BN}$ y $\overline{CM}$. Si $BC=MB+NC$, calcule $m\measuredangle BAC$.

A) 30° B) 45° C) 60°
D) 75° E) 90°

14. En el gráfico se tiene que $MBNP$ es inscriptible; además, y $AM=NM=MC$. ¿Qué punto notable es P del triángulo ABC?



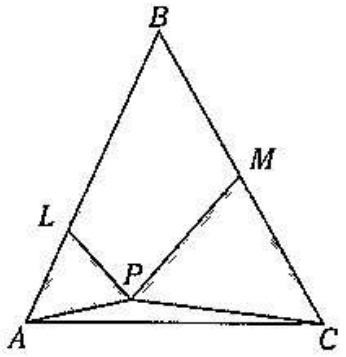
A) baricentro B) ortocentro C) incentro
D) circuncentro E) excentro

15. En un triángulo ABC, recto en B, I_1 e I_2 son incentros de los triángulos ABH y BHC, respectivamente ($\overline{BH}$ es la altura del triángulo ABC). Si $BH=4$ y luego se traza $\overleftrightarrow{I_1I_2}$, que interseca $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en M y N, respectivamente, calcule MB.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

NIVEL INTERMEDIO

16. En el triángulo ABC, la $m\measuredangle ABC=30°$ y los triángulos ALP y PMC son regulares. ¿Qué punto notable es P del triángulo ABC?



A) baricentro
B) ortocentro
C) incentro
D) circuncentro
E) excentro

17. En un cuadrilátero $ABCD$ se sabe que
$m\measuredangle ABD=2(m\measuredangle ACD)=80°$ y
$m\measuredangle ADB=2(m\measuredangle BCA)=30°$.
Calcule la medida del ángulo formado por las diagonales de dicho cuadrilátero.

A) 40° B) 55° C) 60°
D) 65° E) 75°

18. En un cuadrilátero $ABCD$ se traza una circunferencia de centro O, tangente en C, D y P ($P \in \overline{AB}$), luego trazamos $\overline{BO}$ y $\overline{AO}$ que intersecan a $\overline{CD}$ en M y N, respectivamente. Calcule $\dfrac{\widehat{PC}}{m\measuredangle PNC}$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

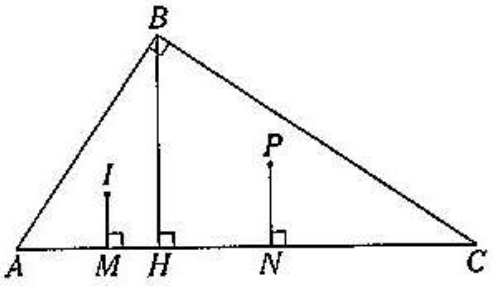
19. En un triángulo ABC se ubica E, que es excentro del triángulo relativo a $\overline{AC}$. Si $AB+BC=3(AC)$ y $IB=3$ (I es incentro del triángulo ABC), calcule el circunradio del triángulo ACE.

A) 1 B) 1,5 C) 2
D) 2,5 E) 3

20. En un triángulo ABC de ortocentro H y baricentro G, se traza $\overline{HG}$ que corta a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en P y Q, respectivamente. Si $m\measuredangle ABC=m\measuredangle BPQ$, calcule $m\measuredangle ABC$.

A) 30° B) 53° C) 60°
D) 75° E) 90°

Del gráfico, I y P son incentros de los triángulos ABH y BHC, respectivamente. Si $IM=8$ y $PN=15$, calcule BH.

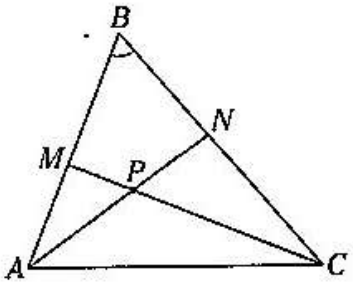


A) 23 B) 32 C) 40
D) 47 E) 50

En un triángulo ABC de ortocentro H e incentro I, $m\measuredangle HAI=40°$ y $m\measuredangle HCI=20°$. Calcule la $m\measuredangle HBI$.

A) 20° B) 45° C) 60°
D) 53° E) 75°

En el gráfico, P es incentro del triángulo ABC. Si $PN=PM$, calcule la $m\measuredangle ABC$.



A) 45° B) 53° C) 60°
D) 75° E) 74°

En un triángulo ABC acutángulo de ortocentro H, baricentro G y circuncentro O, M es el punto medio de $\overline{AC}$. Si $BHMN$ es un rombo de lado 2 y $m\measuredangle HBN=60°$, calcule GO.

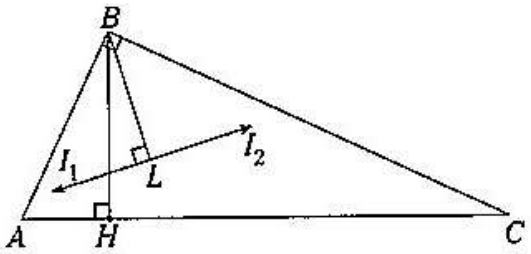
A) 1 B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D) $\frac{4}{4}$ E) $\frac{5}{3}$

25. El triángulo ABC tiene baricentro G, ortocentro H y circuncentro O. Si $GO=\frac{R}{3}$ (R es circunradio del triángulo ABC) y $\overline{AC}$ es el lado mayor, calcule la $m\measuredangle ABC$.

A) 60° B) 75° C) 90°
D) 100° E) 105°

26. Del gráfico, I_1 e I_2 son incentros de los triángulos determinados por BH. Si $BH=a$, calcule BL.



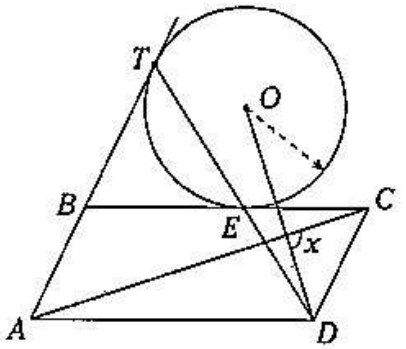
A) $\frac{a}{2}$ B) $\frac{a}{3}$ C) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

D) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ E) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

27. Calcule la medida del ángulo que forma la recta de Euler con el lado $\overline{BC}$ de un triángulo ABC si la $m\measuredangle ABC=120°$.

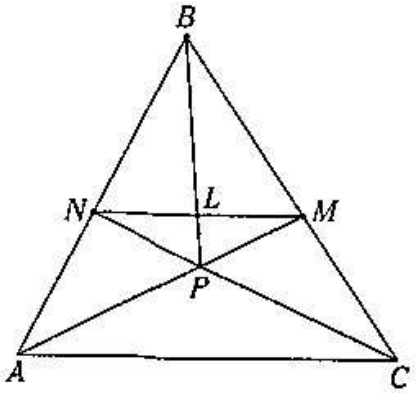
A) 30° B) 45° C) 60°
D) 75° E) 90°

29. Se tiene que $ABCD$ es un paralelogramo, donde T y E son puntos de tangencia. Halle x.



A) 75° B) 90° C) 105°
D) 120° E) 135°

30. En el gráfico, AM y CN son medianas; además, $m\measuredangle APC=120°$, $(NC)(AM)=27$ y $(NC+AM)=21$. Halle PL.



A) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ B) $\sqrt{10}$ C) $\frac{3\sqrt{10}}{2}$
D) $2\sqrt{10}$ E) $\frac{5\sqrt{10}}{2}$

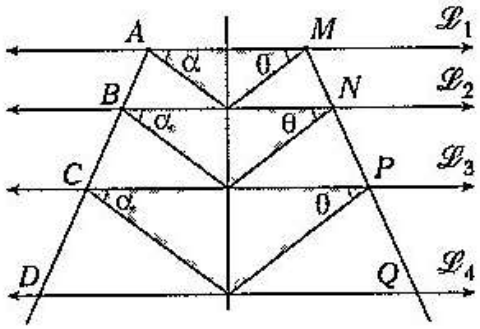
31. En un triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BD}$, tal que $AD=BC$; $m\measuredangle BAC=30°$ y $m\measuredangle BCA=24°$. Calcule la $m\measuredangle ABD$.

A) 54° B) 64° C) 72°
D) 90° E) 96°

ROBLEMAS PROPUESTOS

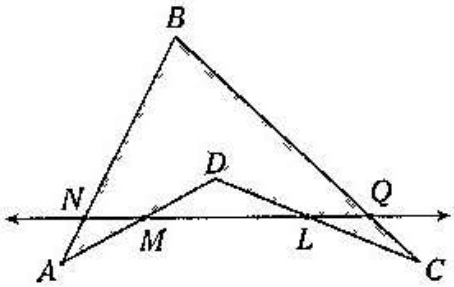
NIVEL BÁSICO

Del gráfico, $\mathscr{L}_1 // \mathscr{L}_2 // \mathscr{L}_3 // \mathscr{L}_4$. Si $CD=9(AB)$ y $MN=2$, calcule NP.



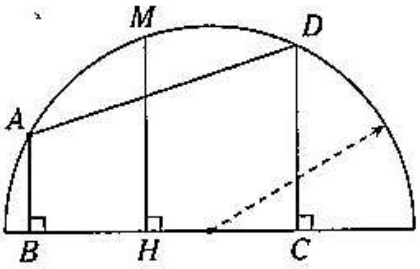
A) 6 B) 12 C) 15
D) 18 E) 27

Del gráfico, $NB=6(AN)$; $AM=MD$; $BQ=5(QC)$ y $LC=30$. Calcule DL.



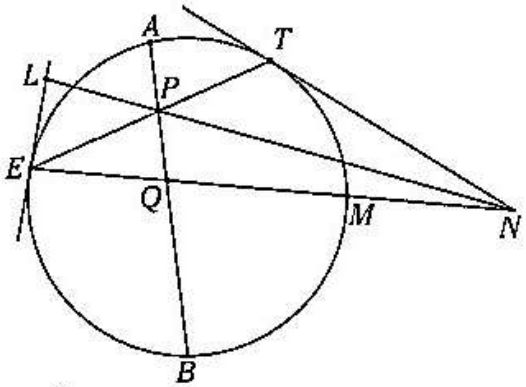
A) 10 B) 15 C) 20
D) 25 E) 35

Si $5(AB)=8(MH)-5(CD)$ y $m\widehat{AM}=m\widehat{MD}$, calcule la medida del arco AMD.



A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 74°

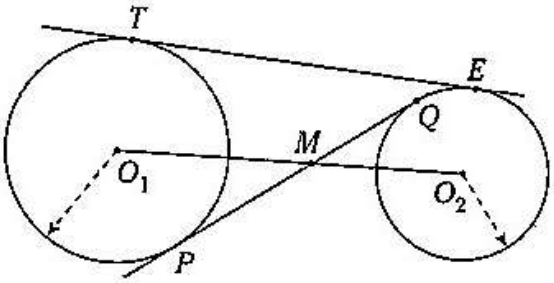
4. Del gráfico, T y E son puntos de tangencia; además, $m\widehat{MB}=m\widehat{ATM}$. Si $EL=a$ y $TN=b$, calcule PQ.



A) $\frac{(a+b)}{ab}$ B) $\frac{ab}{(a+b)}$ C) $\frac{2ab}{(a+b)}$

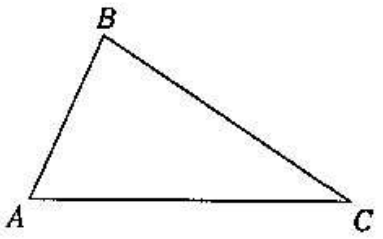
D) $\frac{2(a+b)}{ab}$ E) $\frac{(a+b)}{(a-b)}$

5. Del gráfico, T, E, P y Q son puntos de tangencia; además, $MO_2=1$ y $O_1M=3$. Halle O_2N si $\overleftrightarrow{TE} \cap \overleftrightarrow{O_1O_2}=N$.



A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

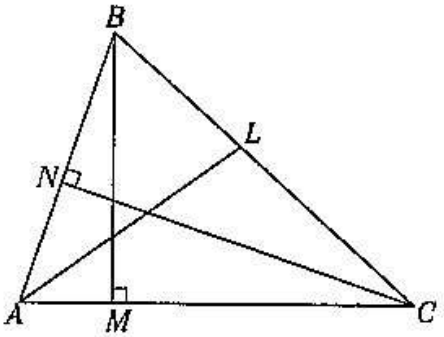
Halle $\dfrac{m\measuredangle BCA}{m\measuredangle BAC}$ si $AB=4$; $BC=6$ y $AC=5$.



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$

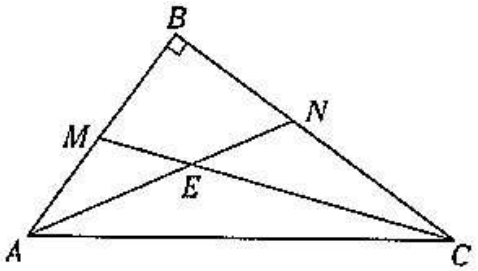
D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

En el triángulo ABC, $AL=5$; $BM=4$ y $CN=12$; además, $\overline{AL}$ es la bisectriz. Calcule la $m\measuredangle BAC$.



A) 30° B) 53° C) 60°
D) 74° E) 90°

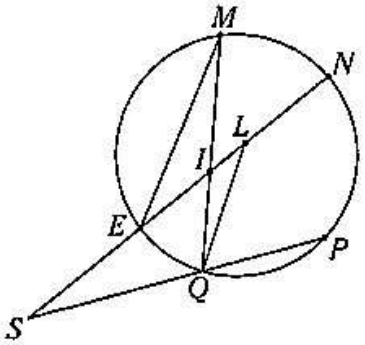
Del gráfico, E es incentro del triángulo rectángulo ABC. Si $MB=a$ y $NB=b$, halle BE.



A) $\sqrt{ab}$ B) $\sqrt{2ab}$ C) $\frac{\sqrt{a}}{b}$

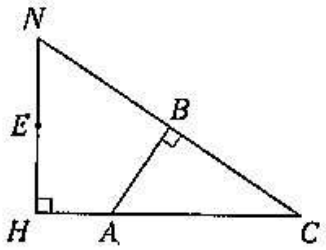
D) $\frac{\sqrt{2a}}{b}$ E) $\frac{\sqrt{2b}}{a}$

9. Del gráfico, $EM // QL$, $IL=2$ y $LN=4$; además, $m\widehat{PN}=2(m\widehat{EQ})+m\widehat{MN}$. Halle SQ.



A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) 4
D) $2\sqrt{3}$ E) $4\sqrt{3}$

10. En el gráfico, E es excentro del triángulo ABC; además, $BC=8$ y $CA=17$. Calcule HN.

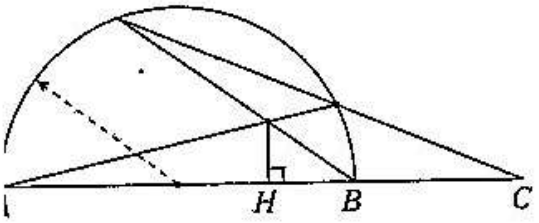


A) 35,5 B) 36,5 C) 37,5
D) 40 E) 44

11. En un cuadrilátero convexo $ABCD$, por los puntos medios de sus diagonales se traza una recta secante que interseca a los lados AB y CD en M y N, respectivamente. Si $AM=2(MB)$ y $ND=3$, calcule CN.

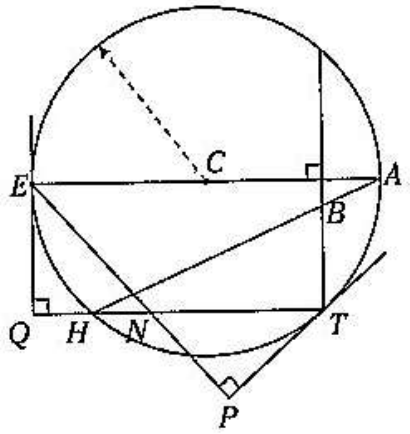
A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 9

Del gráfico, $AH=6(BH)=6$. Calcule BC.



A) 1 B) 1,4 C) 1,5
D) 2 E) 2,5

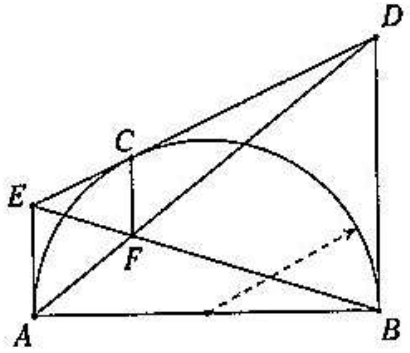
Del gráfico, T y E son puntos de tangencia; además, $QH=1$ y $HT=7$. Calcule AB.



A) $\sqrt{10}$ B) $\frac{\sqrt{30}}{4}$ C) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
D) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ E) $5\sqrt{5}$

NIVEL INTERMEDIO

Del gráfico, A, B y C son puntos de tangencia. Si $AE=3$ y $BD=6$, calcule CF.



A) 2 B) 2,1 C) 2,3
D) 2,5 E) 3,5

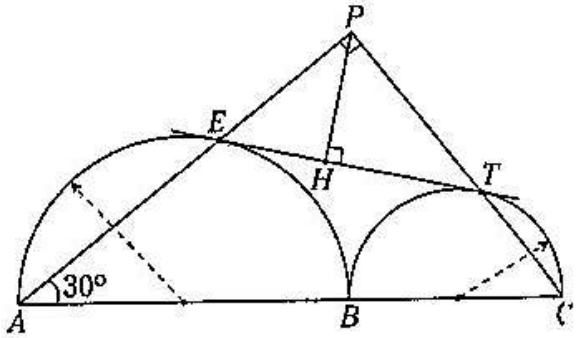
15. En un triángulo ABC, recto en B, se trazan las cevianas interiores $\overline{AQ}$ y $\overline{CP}$, que se intersecan en E. Si $\overline{PQ}//\overline{AC}$, $\overline{BE}$ corta a $\overline{PQ}$ y $\overline{AC}$ en M y N, respectivamente, $BM=3$ y $NE=2$, calcule AC.

A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 16

16. En un triángulo acutángulo ABC se trazan las alturas $\overline{AN}$ y $\overline{BM}$ que se cortan en H. Si $2(AH)=BC$ y $AC=BH$, calcule la m$\measuredangle BHN$.

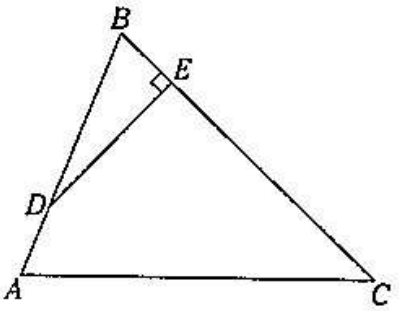
A) 30° B) $\frac{37°}{2}$ C) $\frac{53°}{2}$
D) $\frac{127°}{2}$ E) $\frac{143°}{2}$

17. Del gráfico, T y E son puntos de tangencia y $PH=2\sqrt{3}$. Calcule TE.



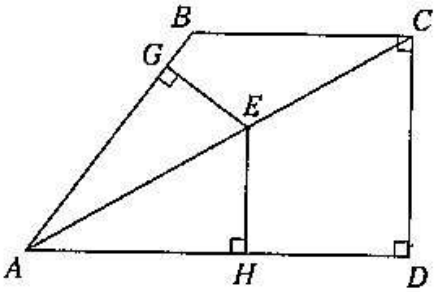
A) 4 B) $4\sqrt{3}$ C) 6
D) $6\sqrt{3}$ E) 8

18. En el gráfico, el circunradio del triángulo ABC es 25. Si $AC=48$ y $DB=6$, calcule DE.



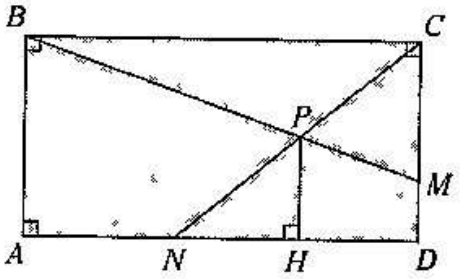
A) 5 B) 5,18 C) 5,36
D) 5,76 E) 5,92

19. En el gráfico, $m\measuredangle BAD=60°$; $BC=CD$ y $EH=4$. Calcule EG.



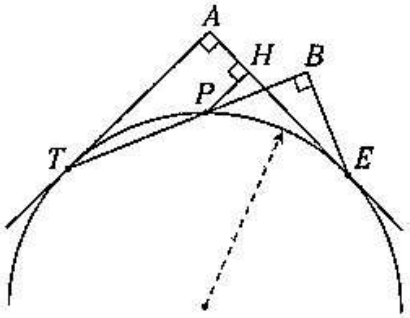
A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{3}$
D) 3 E) $3\sqrt{2}$

20. Del gráfico, $CM=2(MD)$, $3(ND)=5(AN)$ y $AB=85$. Calcule PH.



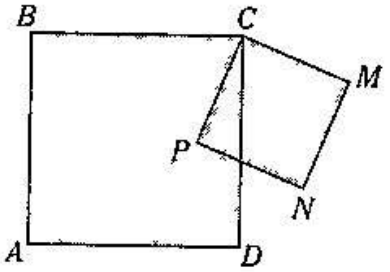
A) 20 B) 35 C) 45
D) 50 E) 55

21. Del gráfico, T y E son puntos de tangencia. Si $PH=1$ y $TA=9$, calcule BE.



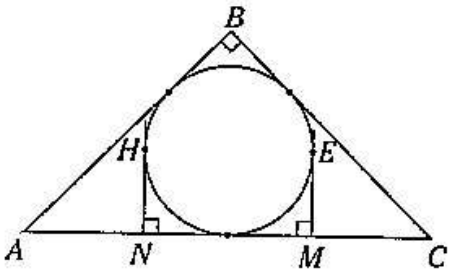
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

22. Del gráfico, $ABCD$ y $CMNP$ son cuadrados. Si $BP=8\sqrt{3}$, calcule la distancia entre los centros de dichos cuadrados.



A) 4 B) $4\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{3}$
D) $4\sqrt{6}$ E) $4\sqrt{7}$

23. Del gráfico se muestra una circunferencia inscrita en el triángulo ABC. Si H y E son puntos de tangencia y $(AN)(MC)=32$, calcule el inradio del triángulo ABC.



A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

En un triángulo ABC, recto en B, se inscribe un cuadrado $MNLT$, donde $TL \in AC$, y $\overline{AN}$ y $\overline{CM}$ se intersecan en P. Si $AT=4$ y $LC=9$ ($T \in \overline{AL}$), calcule la distancia de P a AC.

A) 2 B) 3,5 C) 4
D) 4,5 E) 5

En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza una recta tangente a la circunferencia inscrita y perpendicular a la hipotenusa en H, la cual interseca a BC en F. Halle FH si los perímetros de las regiones ABC y FHC son 24 y 10, respectivamente.

A) 2 B) 2,92 C) 3
D) 3,5 E) 4

En una circunferencia se inscribe un triángulo ABM. Si C y P pertenecen a los $\widehat{AB}$ y $\widehat{BM}$, respectivamente, se prolongan $\overline{BP}$ y $\overline{AM}$ intersecándose en R. Si $m\measuredangle ABC = m\measuredangle MBR$, además, $CM=10$; $BM=16$ y $BR=5$, halle AR.

A) 8 B) 10 C) 12
D) 15 E) 20

En un cuadrilátero inscriptible $ABCD$, la $m\measuredangle CDB = 2(m\measuredangle BDA)$ y las diagonales se intersecan en el punto E. Si $m\measuredangle ACD = 90°$, $BD=6$ y $CD=3$, calcule BE.

A) 2,5 B) 1,5 C) 2
D) 3 E) 1

28. En un triángulo ABC se ubica su circuncentro O y ortocentro L, tal que las prolongaciones de BO y CL intersecan a AL y BO en E y D, respectivamente. Si $3(AB)=4(BC)$ y la distancia de O a AC es 6, calcule ED.

A) 7 B) 8 C) 6
D) 9 E) 7,5

29. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la bisectriz interior BD y la ceviana interior AE tal que AE y BD se intersecan en O. Si $6(AB)=5(BC)$ y $4(BE)=5(EC)$, calcule la $m\measuredangle DOC$.

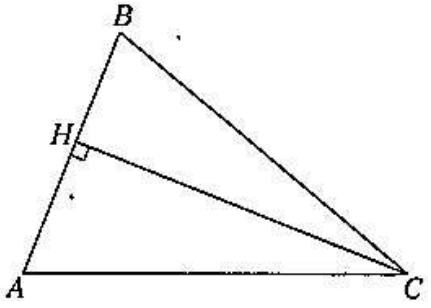
A) 75° B) 82° C) 63°30'
D) 67°30' E) 71°30'

30. En el lado AF de un triángulo ADF se ubica el punto G, tal que $AG=k(AF)$. Luego, con diámetro GF se traza una semicircunferencia de centro O que interseca a AD en B y C, respectivamente ($B \in AC$); de modo que $m\measuredangle BFD = 90°$ y OD interseca al $\widehat{CF}$ en el punto E. Si $m\widehat{CE} = m\widehat{FE}$, calcule $\dfrac{BC}{CD}$.

A) $2K\sqrt{2}$ B) $2K\sqrt{3}$ C) $K\sqrt{2}$
D) K E) $\dfrac{K\sqrt{2}}{2}$

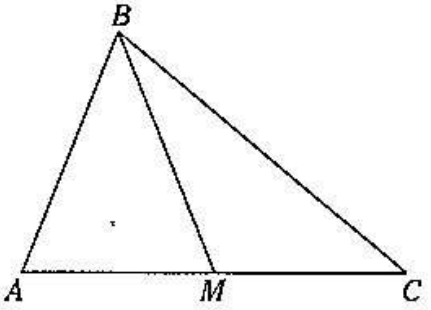
NIVEL BÁSICO

1. Del gráfico, $AB=20$, $AH-BH=8$ y $AC-BC=4$. Halle la longitud del mayor lado del triángulo ABC.



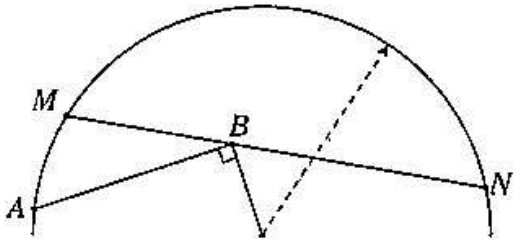
A) 18 B) 20 C) 22
D) 24 E) 26

2. Se tiene que en el triángulo ABC, $AB=6$; $BC=8$ y $MB=\sqrt{14}$. Calcule AC si $AM=MC$.



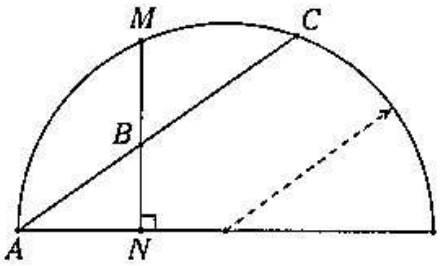
A) 6 B) 8 C) 10
D) 12 E) 14

3. Del gráfico, $AB=4$ y $MN=10$. Calcule BM.



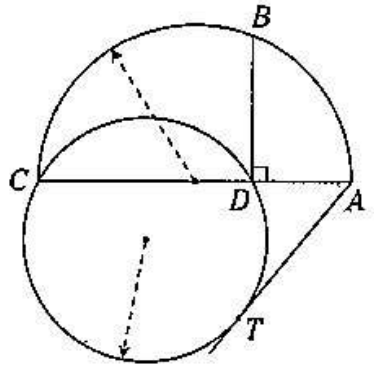
A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) 2
D) $2\sqrt{2}$ E) 3

4. Si $(AB)(BC)=15$ y $BN=1$, calcule BM.



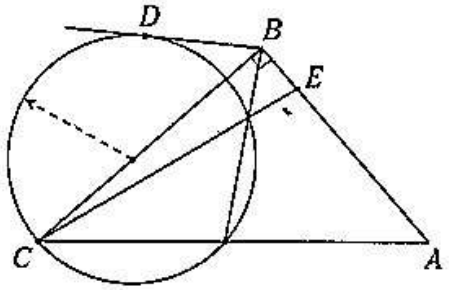
A) 2 B) 5/2 C) $2\sqrt{2}$
D) 3 E) 4

5. Del gráfico, T es punto de tangencia; además, $AT=2(AD)$. Halle la medida del arco BC.



A) 106° B) 120° C) 127°
D) 135° E) 143°

6. En el gráfico, halle BD si $BE=4$, $AE=5$; y D es punto de tangencia.



A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 9

7. En un rombo $ABCD$, el punto M es el punto medio del lado AD. Si $MB^2 + MC^2 = 40$, halle la medida del lado del rombo.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

8. En un triángulo, la diferencia de los cuadrados de las longitudes de dos lados es 128 y el tercer lado mide 10. Entonces el mayor ángulo del triángulo es

A) agudo. B) recto. C) obtuso.
D) A y B. E) B y C.

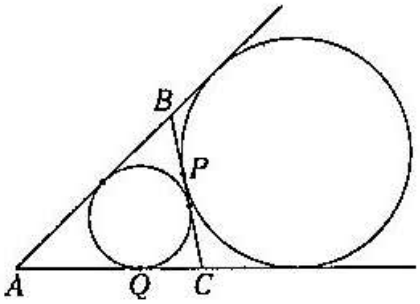
9. En un triángulo ABC, calcule la distancia del ortocentro al baricentro si los lados del triángulo a, b y c, y el circunradio mide R; además, $R^2 = \dfrac{(a^2+b^2+c^2)}{9} + 4$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

10. En un triángulo ABC, las medianas AM, BN y CQ miden 9; 12 y 15, respectivamente. Halle la longitud del menor lado del triángulo.

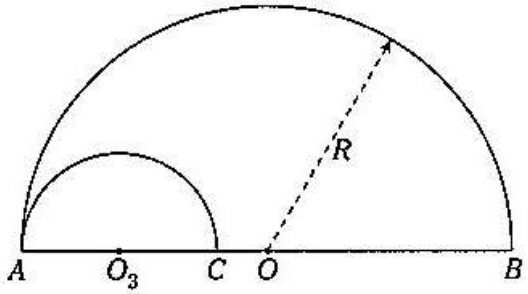
A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

11. En el gráfico, $AB=7$; $BC=5$ y $AC=6$. Halle PQ.



A) $\sqrt{\dfrac{43}{5}}$ B) $\sqrt{\dfrac{53}{5}}$ C) $\sqrt{\dfrac{53}{2}}$
D) $\sqrt{53}$ E) $2\sqrt{53}$

12. Del gráfico, calcule el radio de la circunferencia tangente a las semicircunferencias y al diámetro $\overline{AB}$.



A) $\dfrac{Rr(R-r)}{(R+r)^2}$ B) $\dfrac{4Rr(R-r)}{(R+r)^2}$ C) $Rr(R-r)$
D) $Rr(R+r)$ E) $\dfrac{Rr(R-r)}{(R+r)}$

13. Se traza la semicircunferencia de diámetro AB, en ella se traza la circunferencia tangente a la semicircunferencia y el diámetro en M y R, respectivamente. Si $AR=a$ y $RB=b$, halle MR^2.

A) $\dfrac{ab}{a^2+b^2}$

B) $\dfrac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$

C) $\dfrac{2a^2b^2}{a^2-b^2}$

D) $\dfrac{a^2b^2}{a^2-b^2}$

E) $\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$

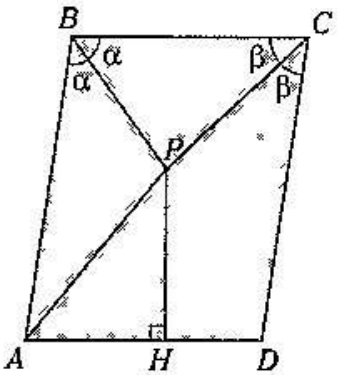
14. En un cuadrado $ABCD$, se trazan los cuadrantes $\widehat{AC}$ de centro B y D. También el cuadrante $\widehat{BD}$ de centro A, que corta a los cuadrantes anteriores en los puntos M y N. Si $AB=BC=3\sqrt{2}+2$, calcule el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo curvilíneo MNC.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

15. Una circunferencia y una semicircunferencia de diámetro AB son tangentes exteriores, tal que AP es tangente a la circunferencia, y en la prolongación de AB se ubica H, donde $AB=4$ y $BH=1$. Si HT es tangente a la circunferencia y $m\measuredangle AHT=90°$, calcule AP.

A) $\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $3\sqrt{5}$
D) $4\sqrt{5}$ E) $5\sqrt{5}$

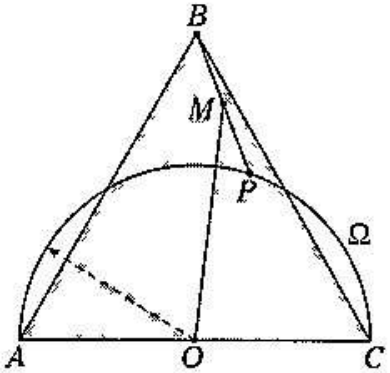
16. Se tiene que $ABCD$ es un paralelogramo (romboide), donde $AB=10$ y $BC=6$. Si $HD=2$, calcule AP.



A) 6 B) $4\sqrt{2}$ C) 8
D) 9 E) $8\sqrt{2}$

NIVEL INTERMEDIO

17. En el gráfico, ABC es un triángulo equilátero O es centro de la semicircunferencia Ω y M es punto medio de BP, donde P está contenido en Ω. Calcule OM si $AC=6$ y $BP=2$.



A) $\sqrt{15}$ B) 4 C) $\sqrt{17}$
D) $9\sqrt{2}$ E) $\sqrt{19}$

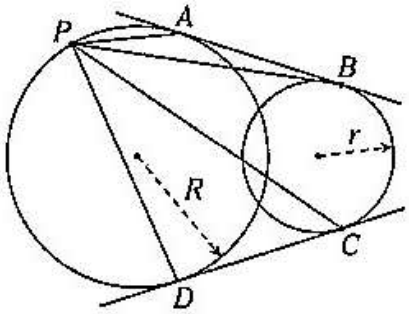
18. En un triángulo ABC de ortocentro M se prolonga la altura BL hasta P, tal que $m\measuredangle APC=90°$. Si $BM=5$ y $ML=4$, halle PL.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

19. En una semicircunferencia de diámetro AB se ubican los puntos C y D, tal que AC interseca a BD en el punto P.
Si $(AP)(AC)+(BP)(BD)=144$, calcule el radio de dicha semicircunferencia.

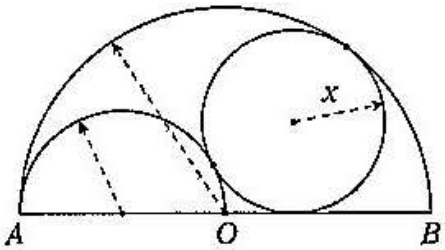
A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 12

20. En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia. Si $\frac{(PA)^2-(PD)^2}{(PB)^2-(PC)^2}=8$, calcule $\frac{R}{r}$.



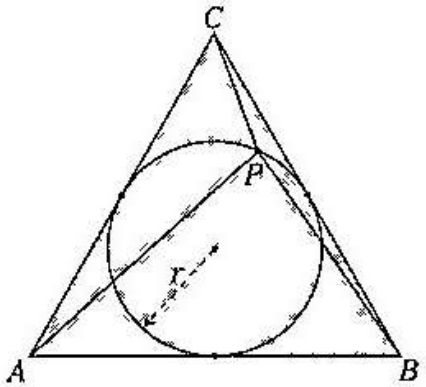
A) 2 B) 4 C) 8
D) 16 E) $2\sqrt{2}$

21. En el gráfico, calcule x si $AB=36$.



A) 6 B) 8 C) 9
D) 10 E) 12

22. Según el gráfico, calcule $(PA)^2+(PB)^2+(PC)^2$ si ABC es un triángulo equilátero y $r=1$.



A) 16 B) 18 C) 21
D) 12 E) 15

23. Se tiene que B pertenece al segmento OQ, tal que O y Q son centros de los cuadrantes $\widehat{AB}$ y $\widehat{BC}$. Si $(OB)(BQ)=12$ y $AC=8$, calcule la distancia de B hacia AC.

A) 2 B) 3 C) 3,5
D) 4 E) 5

24. En un triángulo ABC, recto en B, se traza la ceviana interior AQ y la altura BH en el triángulo ABQ. Si $ABHP$ es un trapecio isósceles, donde P pertenece a AC, $AH=9$ y $HQ=4$, calcule PC.

A) 9,5 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13,5

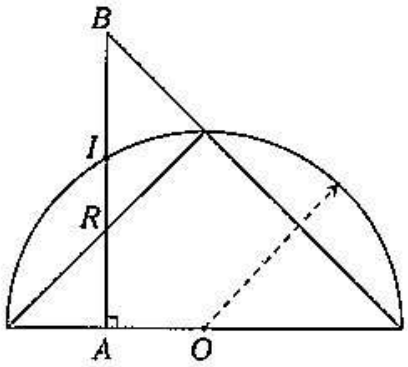
25. En una semicircunferencia de diámetro PC y centro O se traza interiormente la semicircunferencia de diámetro PD ($D \in CO$); luego se traza $QO \perp PC$, que corta a las semicircunferencias mayor y menor en los puntos A y B, respectivamente ($AB=a$ y $CD=b$). Calcule el radio de la semicircunferencia mayor.

A) $\frac{a^2}{(a+b)}$ B) $a+b$ C) $\frac{a^2}{(2a-b)}$
D) $\frac{2a^2}{(a+b)}$ E) $2a-b$

26. En un cuadrante MOC de centro O se ubica P en MO. En el cuadrante se ubican los puntos A y B; además, se traza $PB \perp MO$. Si $m\measuredangle APB = m\measuredangle BPC$; $PA=a$ y $PC=b$, halle PB

A) $\sqrt{2ab}$ B) $\sqrt{ab}$ C) $\frac{(a+b)}{2}$
D) $2\sqrt{ab}$ E) $\frac{ab}{2}$

En el gráfico, calcule RA, en cm, si $BI=a$ cm y $IR=b$ cm ($b < a$).

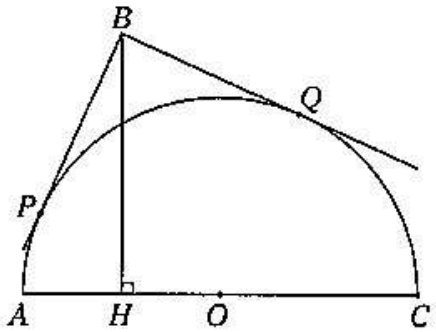


A) $\dfrac{a^2+b^2}{a-b}$ B) $\dfrac{2b^2}{a-b}$ C) $\dfrac{b^2}{a-b}$

D) $\dfrac{2a^2}{a-b}$ E) $\dfrac{a^2}{a-b}$

UNI 2008-I

En el gráfico, AC es el diámetro de la circunferencia de centro O y R su radio; además, P y Q son puntos de tangencia. Si $m\measuredangle PBQ=90°$ y $BH=h$, calcule $AH \cdot HC$.

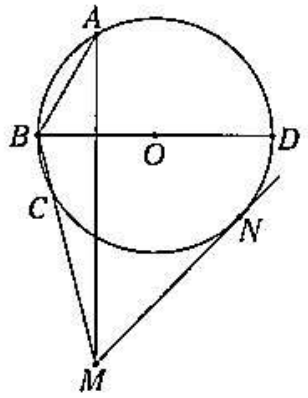


A) h^2-R^2 B) $2(h^2-R^2)$ C) $3(h^2-R^2)$

D) $4R^2-h^2$ E) $2(4R^2-h^2)$

UNI 2009-II

29. En el gráfico, BD es diámetro de la circunferencia de centro O, MN es tangente y BM es secante. Si $AB=5$ y $MN=12$, calcule BM.



A) 13 B) 11 C) 11

D) 10 E) 9

UNI 2009-II

30. En un triángulo rectángulo se inscribe una circunferencia cuyo radio r es $\frac{1}{6}$ de la longitud de la hipotenusa. Luego, la longitud del segmento que une el incentro con el baricentro del triángulo dado es

A) $\dfrac{2r}{3}$. B) $\dfrac{r\sqrt{3}}{2}$. C) $\dfrac{3r}{5}$.

D) $\dfrac{r\sqrt{6}}{3}$. E) $\dfrac{5r}{8}$.

UNI 2002-I

31. En una semicircunferencia de diámetro MP, interiormente se trazan dos circunferencias tangentes a los arcos en S y T ($S \in \widehat{MT}$) y el diámetro N y L ($L \in \overline{NP}$). Si $MN=8$; $LP=15$ y $m\widehat{ST}=90°$, calcule NL.

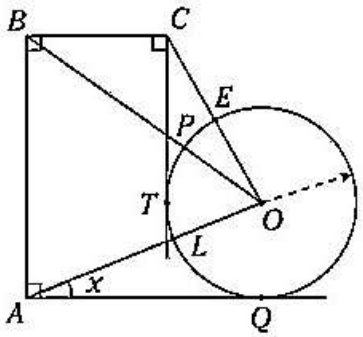
A) 8 B) 11,5 C) 12

D) 15 E) 17

32. En un triángulo ABC, $AB=25$; $BC=30$ y $AC=35$; además, su circunferencia inscrita es tangente a BC en M, y AM interseca a dicha circunferencia en P. Calcule BP.

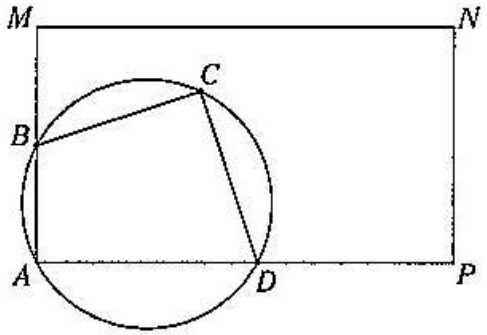
A) $\sqrt{71}$ B) $2\sqrt{73}$ C) 14
D) $2\sqrt{71}$ E) 16

33. Según el gráfico, T y Q son puntos de tangencia; además, $CE=3$; $BP=5$ y $AL=4$. Calcule x.



A) 37° B) 53° C) $\frac{53°}{2}$
D) 30° E) 45°

34. Según el gráfico, $AB=\sqrt{5}$; $BC=3$; $CD=4$ y $AD=2\sqrt{5}$. Si $AMNP$ es un rectángulo, calcule $(MC)^2+(CP)^2-(CN)^2$.



A) $\frac{22}{7}$ B) 100 C) 144
D) $\frac{55}{7}$ E) $\frac{66}{7}$

35. En un cuadrante AOB de centro O, interior mente se traza una circunferencia tangente a $\widehat{AB}$ y a $\overline{OB}$ en M y N, respectivamente, tal que AB interseca a MN en el punto Q. Si $2(AO)(ON)-(NQ)(QM)=16$, calcule AQ.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

NIVEL BÁSICO

1. El perímetro de un triángulo equilátero es igual a $30\sqrt{3}$. Calcule el perímetro del hexágono regular inscrito en aquella circunferencia que inscribe al triángulo mencionado.

A) 10 B) 20 C) 30
D) 50 E) 60

2. Se tiene una circunferencia circunscrita a un triángulo equilátero ABC de radio $2\sqrt{7}$. Calcule la longitud del segmento que tiene por extremos el punto medio del arco AB y el punto medio del lado AC.

A) 2 B) 4 C) 5
D) 7 E) 9

3. Se tiene un cuadrado $ABCD$ inscrito en una circunferencia de radio 1. Calcule la distancia del vértice A hacia el punto medio del arco CD.

A) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ B) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ C) $\sqrt{3-\sqrt{2}}$
D) $\sqrt{3+\sqrt{2}}$ E) $\sqrt{5-\sqrt{2}}$

4. Un cuadrado se encuentra inscrito en una circunferencia de radio $4\sqrt{2}$. Calcule la longitud del lado del octógono regular inscrito en el cuadrado.

A) $2-\sqrt{2}$
B) $3-\sqrt{2}$
C) $4(2-\sqrt{2})$
D) $3(2-\sqrt{2})$
E) $5(2-\sqrt{2})$

5. Un hexágono regular se encuentra inscrit en una circunferencia de radio 12, y al tra zarse las diagonales que no son diámetro se forma otro hexágono regular. Calcule e lado de este hexágono.

A) 1 B) 2 C) 3
D) $4\sqrt{3}$ E) 5

6. Un octógono regular se encuentra inscrit en una circunferencia de radio $6\sqrt{2}$. Calcul el lado del octógono que tiene por vértice los puntos medios de los lados del prime octógono.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

7. En un triángulo ABC, se traza la ceviana inte rior BN, tal que $m\measuredangle BAN=54°$; $m\measuredangle ABN=18°$ $m\measuredangle NBC=72°$ y $BC=\sqrt{5}+1$. Halle BN.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

8. En un triángulo ABC, $AB=2$ y $BC=\sqrt{5}+1$ Halle la $m\measuredangle BAC$ si $m\measuredangle BCA=18°$.

A) 15° B) 30° C) 45°
D) 60° E) 75°

9. Se tiene una circunferencia de diámetro A y centro O en la cual se traza la cuerda CD Si las longitudes de las proyectantes de A B hacia $\overline{CD}$ son 1 y $\sqrt{5}$, respectivamente, además $m\widehat{CAD}=144°$, halle el radio de di cha circunferencia.

A) 2 B) 4 C) 5
D) 7 E) 9

10. Se tiene un octógono regular *ABCDEFGH* inscrito en una circunferencia. En el arco *BC* se ubica el punto *P*, tal que $PD=a$ y $PF=b\sqrt{2}$. Halle *PH*.

A) $2a-b$ B) $4a+3b$ C) $a+b$
D) $2a+b$ E) $2b-a$

11. El circunradio de un triángulo *ABC* es $6\sqrt{3}$. Si $m\measuredangle ABC=60°$, halle la longitud del segmento que tiene por extremos los pies de las alturas trazadas de *A* y *C*.

A) 2 B) 4 C) 5
D) 7 E) 9

12. La longitud del lado del dodecágono *ABCDE* es $\sqrt{6-3\sqrt{3}}$. Halle *AE*.

A) 2 B) 3 C) 5
D) 7 E) 9

13. Calcule el perímetro de un pentágono regular cuya diagonal mide $\sqrt{5}+1$.

A) 4 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

14. En un dodecágono regular *ABCDEFGHIJKL*, $AG-AE=2$. Halle el lado del dodecágono.

A) $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

B) $2\sqrt{1+\sqrt{3}}$

C) $2\sqrt{2-\sqrt{3}}$

D) $2\sqrt{\sqrt{3}-1}$

E) $2\sqrt{4+\sqrt{3}}$

15. Se tiene un octógono regular *ABCD...*, y en su región interior se ubican los cuadrados *ABRP* y *BCQN*. Halle *PQ* si el lado del cuadrado mide $\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) 3
D) $3\sqrt{2}$ E) 4

NIVEL INTERMEDIO

16. En un triángulo isósceles *ABC*, recto en *B*, por *B* y *C* se traza una circunferencia que corta en *M* y *N* a *AB* y *AC*, respectivamente; además, el radio de la circunferencia es $\sqrt{5}+1$ y $m\widehat{BM}=54°$. Halle *MN*.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

17. En un paralelogramo *ABCD* se cumple que $BC=AC$. Calcule *BD* si $m\measuredangle CAD=30°$ y $AD=\sqrt{5+2\sqrt{3}}$.

A) 13 B) $2\sqrt{13}$ C) $\sqrt{13}$
D) 12 E) $\sqrt{5}$

18. Se tiene un trapecio *ABCD* inscrito en una circunferencia de radio *R*. Halle la altura del trapecio si las bases son l_6 y l_4.

A) $\dfrac{R(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2}$

B) $\dfrac{R(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3}$

C) $\dfrac{R(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3}$

D) $\dfrac{R(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{4}$

E) $\dfrac{R(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{5}$

0. Se tiene un nonágono regular *ABCDEFGHI*, donde $AB+BD=18\sqrt{2}$. Halle *BG*.

A) $14\sqrt{2}$ B) $16\sqrt{2}$ C) $18\sqrt{2}$
D) $20\sqrt{2}$ E) $22\sqrt{2}$

0. Calcule el lado de un polígono regular si es igual a la apotema más el radio de la circunferencia circunscrita, midiendo el radio 5.

A) 4 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

21. En un triángulo rectángulo *ABC*, la $m\measuredangle ACB=11°15'$ y la longitud de la hipotenusa *AC* es igual a $2\sqrt{4+2\sqrt{2}}$. Halle la altura relativa a dicha hipotenusa.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

22. Se tiene el cuadrante *AOB* y la circunferencia inscrita tangente en *P*, *Q* y *T* en $\overline{OB}$, $\overline{OA}$ y $\widehat{AB}$, respectivamente. La prolongación de *TQ* corta a la prolongación de $\overline{BO}$ en *N*. Halle *QN* si el radio de la circunferencia mide $\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

23. En un cuadrilátero *ABCD*, la $m\measuredangle ABD=m\measuredangle ACD=90°$. Halle *BC* si $AD=\sqrt{5}-1$ y $m\measuredangle CAD=2m\measuredangle ADB=24°$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

24. En un cuadrilátero *ABCD*, $AB=2\sqrt{10-5\sqrt{3}}$ $CD=\sqrt{50-10\sqrt{6}}$; además, el circunradio d dicho cuadrilátero es $2\sqrt{5}$. Halle la medid del ángulo formado por las diagonales d cuadrilátero *ABCD*.

A) 18° B) 36° C) 51°
D) 54° E) 72°

25. En un trapecio isósceles *ABCD*, $AB=BC=CD=\sqrt{50-10\sqrt{5}}$ y $m\measuredangle BAD=m\measuredangle ADC=18°$. Halle la longitu del segmento que une los puntos medio de las diagonales.

A) 5 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

26. En un triángulo *ABC*, la $m\measuredangle ACB=45°$. Si *I* e el incentro y *O* el circuncentro del triángul *ABC*, tal que $m\measuredangle AIO=90°$ y $AI=2$, calcule *B*.

A) $2\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{2}$
D) $3(2-\sqrt{2})$ E) $5\sqrt{2}$

27. El diámetro $\overline{AB}$ de la semicircunferencia s ubica el punto *C*, luego, se traza el rectángu lo *CDEB*, cuyo centro pertenece a la semi circunferencia. Si $DE=4$ y $\overline{BE}$ es la sección áurea de $\overline{DE}$, calcule el radio de la semici cunferencia.

A) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}{2}$ C) $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$
D) $\frac{(\sqrt{5}+1)}{4}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{8}$

28. En un triángulo ABC, con centro en B, se traza un arco de circunferencia secante a AB y BC en M y N, respectivamente; además, dicho arco contiene al ortocentro y al circuncentro de ABC. Si $MN=a$, calcule AC.

A) $a\sqrt{5}$ B) $a\sqrt{3}$ C) a

D) $a(\sqrt{5}+a)$ E) $a\sqrt{2}$

29. En un dodecágono regular $ABCDEFGHIJKL$, de centro O, $LD \cap AF=\{P\}$. Si $AL=K$, calcule OP.

A) $\frac{K}{2}$ B) $\frac{K\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{K}{3}$

D) $\frac{3K}{2}$ E) K

30. En un cuadrado $ABCD$, con centro B, se traza el arco AC. En AD y CD se ubican los puntos M y N, respectivamente, tal que MN es tangente a AC en T; $BM \cap AC=\{Q\}$. Calcule QM si $AM+CN=4(\sqrt{5}+1)$ y $m\measuredangle CBN=27°$.

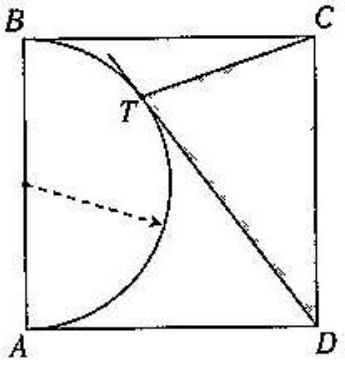
A) 3 B) 4 C) $2\sqrt{2}$

D) $2\sqrt{5}$ E) $2\sqrt{10}$

PROBLEMAS PROPUESTOS

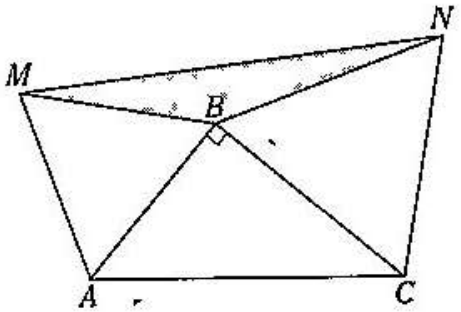
NIVEL BÁSICO

1. En el cuadrado $ABCD$, de lado igual a 5, halle $\mathbb{A}_{\triangle CDT}$ si T es punto de tangencia.



A) $\frac{15}{2}$ B) $\frac{17}{2}$ C) $\frac{19}{2}$
D) $\frac{21}{2}$ E) $\frac{23}{2}$

2. El área de la región triangular ABC es 24. Si $\triangle MAB$ y $\triangle BNC$ son equiláteros, calcule el área de la región triangular MBN.

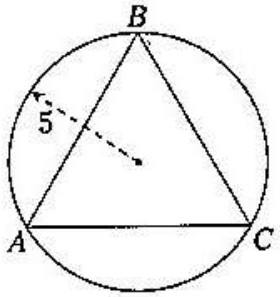


A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

3. En un triángulo rectángulo ABC, la altura relativa a la hipotenusa $\overline{AC}$ tiene una longitud de 2,4 y $AB=4$. Halle $\mathbb{A}_{\triangle ABC}$.

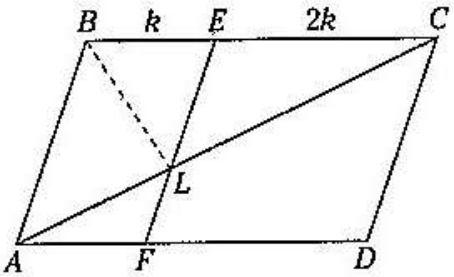
A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

4. En el gráfico, la base del triángulo ABC es $\overline{AC}$; además, $AC=8$. Determine $\mathbb{A}_{\triangle ABC}$.



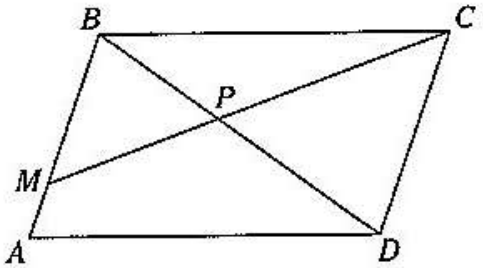
A) 28 B) 30 C) 32
D) 34 E) 36

5. En el romboide $ABCD$, $\overline{EF}//\overline{AB}$ y $\mathbb{A}_{\square ABLF}=16$. Calcule $\mathbb{A}_{\square ABCD}$.



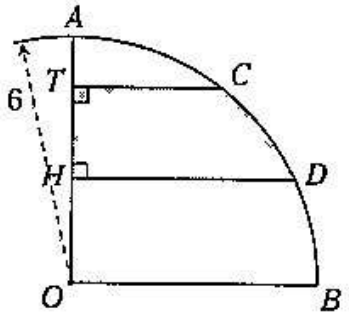
A) 50 B) 54 C) 60
D) 64 E) 72

6. En el paralelogramo $ABCD$, la distancia de P hacia $\overline{BC}$ es 1. Calcule $\mathbb{A}_{\triangle APD}$ si $BM=2(AM)$ y $BC=8$.



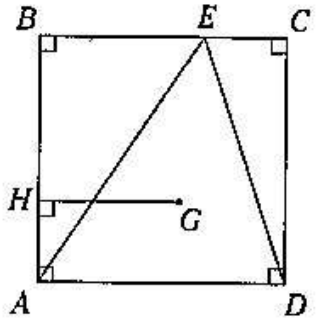
A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

7. Del cuadrante AOB, $m\widehat{AC} = m\widehat{BD} = 20°$. Halle $\mathbb{A}_{\square THDC}$.



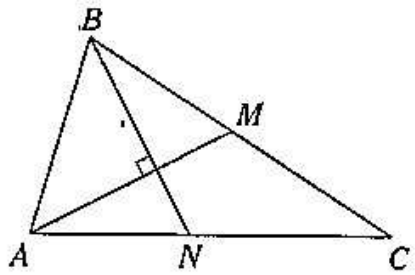
A) 5π B) 8π C) 9π
D) 10π E) 11π

0. Del cuadrado $ABCD$, $AH=2$. Si G es baricentro del triángulo AED, calcule $\mathbb{A}_{\triangle AED}$.



A) 24 B) 27 C) 9
D) 36 E) 18

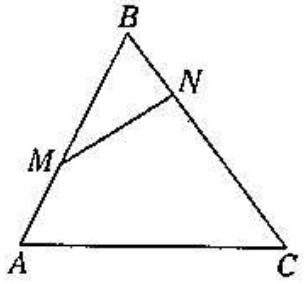
0. Del gráfico, la longitud de las medianas $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$ son 12 y 6, respectivamente. Calcule $\mathbb{A}_{\triangle ABC}$.



A) 48 B) 36 C) 54
D) 72 E) 90

10. Del gráfico, $\frac{AM}{BM} = \frac{BN}{CN} = \frac{1}{3}$ y $\mathbb{A}_{\triangle ABC}=16$.

Calcule $\mathbb{A}_{\triangle AMNC}$.



A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

11. En un rectángulo $ABCD$, M es punto medi de $\overline{BC}$ e I es el incentro del triángulo MCD además, $AB=4$ y $AD=6$. Halle $\mathbb{A}_{\triangle ABI}$.

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

12. Se tiene un triángulo rectángulo ABC, recto en B, donde se ubican P, Q y R en $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente, tal que $PQBR$ es un cuadrado, y M y N son las proyecciones ortogonales de Q y R sobre $\overline{AC}$. Si $AB=3$ y $BC=4$ calcule $\mathbb{A}_{\triangle MBN}$.

A) 2,88 B) 3 C) 3,88
D) 4 E) 4,88

13. En un triángulo rectángulo ABC ($m\measuredangle B=90°$), se levanta la perpendicular $\overline{CP}$ al lado AC, tal que $CP=AC$. Halle el área del triángulo BPC si $BC=4$.

A) $4\ m^2$ B) $6\ m^2$ C) $8\ m^2$
D) $12\ m^2$ E) $16\ m^2$

14. En un triángulo rectángulo ABC ($m\measuredangle B=90°$), por un punto de $\overline{AC}$ se levanta una perpendicular a $\overline{AC}$ que corta a $\overline{BC}$ en Q, determinando dos regiones equivalentes. Halle QC si $AC=\sqrt{2}$ m.

A) 1 m B) 0,5 m C) 1,25 m
D) $\sqrt{\frac{2}{2}}$ E) $\sqrt{\frac{2}{4}}$

15. En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$, se traza una recta paralela al diámetro que corta a la semicircunferencia en P y Q. Si la distancia de A a la recta mide 6 m y $PQ=5$ m, determine el área de $APQB$.

A) $36\ m^2$ B) $54\ m^2$ C) $56\ m^2$
D) $48\ m^2$ E) $64\ m^2$

NIVEL INTERMEDIO

16. En el interior de un triángulo ABC se ubica un punto P, luego se trazan las distancias $\overline{PS}$; $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$ a los lados $\overline{AC}$; $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente. Halle $\frac{PS}{hb}+\frac{PQ}{hc}+\frac{PR}{ha}$ si ha; hb y hc son alturas relativas a los lados $\overline{BC}$; $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$.

A) 0,5 B) 1 C) 2
D) $\frac{2}{3}$ E) 4

17. En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ se ubica P en la prolongación de $\overline{AB}$ y se traza la tangente $\overline{PT}$ (T punto de tangencia) Si $m\measuredangle APT=4(m\measuredangle TAP)$ y $AB=4\sqrt{3}$, calcule el área del segmento circular $\overline{AT}$.

A) $5\pi-4$ B) $6\pi-5$ C) $8\pi-4$
D) $5\pi-3$ E) $8\pi-3$

18. En un triángulo ABC se traza la circunferencia exinscrita relativa al lado $\overline{AB}$, tangente a las prolongaciones de los otros lados en T y E (T pertenece a la prolongación de $\overline{CA}$) Si $AB=5$; $CT=12$ y $m\measuredangle ACB=28°$, halle el área de la región ABC.

A) 18 B) 19 C) 20
D) 21 E) 22

19. Se ubican los puntos consecutivos A, B y C, y se trazan dos semicircunferencias en el mismo semiplano de diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ Luego, se traza la tangente común en T y en P Si $\mathbb{A}_{\triangle ATM}\times\mathbb{A}_{\triangle BPC}=100$, calcule $\mathbb{A}_{\triangle BPT}$.

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

20. Dado un triángulo ABC de incentro I, en la región exterior, relativo a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos P y Q, respectivamente; luego se traza $\overline{IH} \perp \overline{AC}$ $(H \in \overline{AC})$. Si $\overline{PA}$ y $\overline{QC}$ son bisectrices de sus correspondientes ángulos exteriores, además, la $m\measuredangle APB = m\measuredangle BQC = 90°$ y el $\mathbb{A}_{\triangle ABC}=6$, calcule $\mathbb{A}_{PHQI}$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

21. En un triángulo ABC, se traza la bisectriz exterior $\overline{BE}$ y la mediana $\overline{AM}$, que prolongada interseca a $\overline{BE}$ en P. Determine el área de la región triangular BPM si $AB=3BC$ y el área del triángulo ABC es 40 m^2.

A) 3 m^2 B) 4 m^2 C) 6 m^2
D) 8 m^2 E) 5 m^2

22. Determine el perímetro de un triángulo si $r_a \cdot r_b + r_b \cdot r_c + r_a \cdot r_c = 25$ m^2, siendo r_a, r_b y r_c exradios.

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

23. Determine el área de una región triangular si sus exradios relativos a sus lados miden 2 cm, 3 cm y 6 cm.

A) 3 cm^2 B) 4 cm^2 C) 6 cm^2
D) 20 cm^2 E) 12 cm^2

24. En un rectángulo $ABCD$, cuya área mi 64 m^2, sus diagonales se cortan en O. Si s bre $\overline{AO}$; $\overline{OB}$; $\overline{OC}$ y $\overline{OD}$ se toman los puntos Q, R y S, respectivamente, tal que $AP=P$ $QO=3BQ$; $RC=3OR$ y $OS=SD$, calcule área de la región $PQRS$.

A) 7,5 m^2 B) 10 m^2 C) 8 m^2
D) 1 m^2 E) 15 m^2

25. Determine el área de una región limit da por un trapecio bicéntrico cuyas bas miden 4 m y 9 m.

A) 25 m^2 B) 30 m^2 C) 32 m^2
D) 36 m^2 E) 39 m^2

26. En un paralelogramo $ABCD$ de área 80, M N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$, respec vamente. Calcule el área de la región limit da por el cuadrilátero cuyos lados son par de $\overline{CN}$; $\overline{DM}$; $\overline{AC}$ y $\overline{DB}$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

27. Sea el triángulo equilátero AQC, dond se ubica P, R y B en la región exterior r lativa $\overline{AQ}$, región exterior relativa a $\overline{QC}$ región interior, respectivamente. Adem se tiene que $\overline{PB} \cap \overline{AQ} = E$; $\overline{QC} \cap \overline{BR} = T$ $m\measuredangle ABC = 90°$. Los triángulos APB y BR son equiláteros. Si $\mathbb{A}_{\triangle APE}=8$; $\mathbb{A}_{\triangle TRC}=10$ $\mathbb{A}_{\triangle ABC}=14$, halle $\mathbb{A}_{\square EQTB}$.

A) 4 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

28. Se ubica P en la región exterior y relativa a $\overline{AD}$. De un trapecio $ABCD$ de bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, trazamos el paralelogramo $BMAN$ (M punto medio de $\overline{CD}$), $\mathbb{A}_{\triangle ANP}+\mathbb{A}_{\triangle BPM}=8$. Calcule $\mathbb{A}_{\triangle BCM}+\mathbb{A}_{\triangle AMD}$. ($\overline{NP}$ corta a $\overline{AM}$).

A) 8 B) 10 C) 13
D) 15 E) 17

29. Se tiene dos circunferencias tangentes interiores, la mayor de diámetro $\overline{AC}$, tangentes en T, $AT=3TC$. Calcule el área del círculo inscrito en el triángulo de vértices que son los centros y el punto T. La distancia entre los centros es 10.

A) π B) 3π C) 4π
B) $\frac{3\pi}{2}$ E) 5π

30. En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ se ubica P en la prolongación y luego se traza $\overline{PT}$ tangente a la semicircunferencia en T. Además, $\overline{BP}$ y $\overline{TP}$ son diámetros de dos semicircunferencias, respectivamente, y el radio de las regiones semicirculares de diámetro AB y BP son R y r, respectivamente. Calcule el área de la región semicircular de diámetro BP, si $\sqrt{r(R+r)}=3$

A) 15π B) 2π C) 3π
D) 4π E) 9π

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL BÁSICO

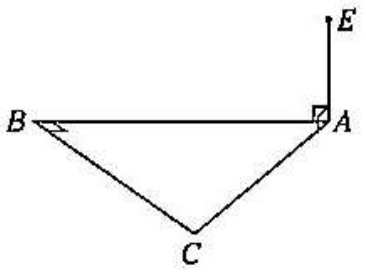
1. Por un punto exterior a una recta, ¿cuántas perpendiculares a dicha recta se pueden cruzar?

A) 1 B) 2 C) 3
D) ninguna E) infinitas

2. Si un plano es paralelo a una recta, entonces

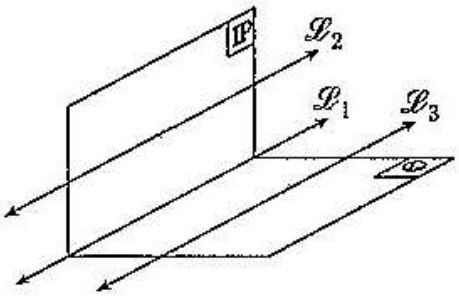
A) toda perpendicular a la recta será paralela al plano.
B) toda recta paralela al plano será paralela a la recta dada.
C) todo plano perpendicular al plano dado será paralelo a la recta dada.
D) toda recta que es perpendicular al plano tendrá que ser perpendicular a la recta.
E) ninguna de las afirmaciones es correcta.

3. En el gráfico, $\overline{AE}$ es paralelo al plano del triángulo ABC, $AB=3$ y $BC=AE=4$. Calcule la distancia de E hacia $\overline{BC}$.



A) 7 B) 6 C) 5
D) 4 E) 2

4. Si el ▱ℙ ⊥ ▱ℚ y la distancia entre $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ es 16 y entre $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_3$ es 12, calcule la distancia entre $\mathscr{L}_2$ y $\mathscr{L}_3$.

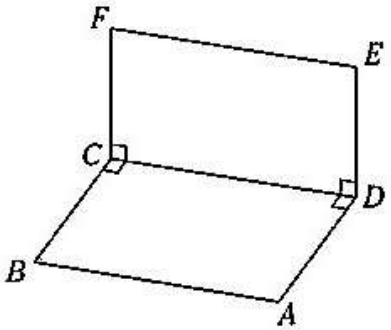


A) $10\sqrt{3}$ B) 20 C) 14
D) 25 E) $4\sqrt{26}$

5. A uno y otro semiespacio determinado por el plano ℍ están los puntos P y Q equidistantes 12 cm del plano ℍ. Halle el valor de PQ sabiendo que el segmento comprendido entre los pies de las perpendiculares que se trazan desde P y Q al plano ℍ mide 7 cm.

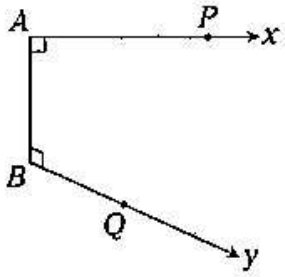
A) 26 cm
B) 25 cm
C) 30 cm
D) 32 cm
E) 27 cm

6. Sean $ABCD$ un cuadrado y $CDEF$ un rectángulo en planos perpendiculares. Si $AB=2$ y $DE=10$, calcule la distancia de E hacia $\overleftrightarrow{AC}$.



A) $\sqrt{103}$ B) $\sqrt{105}$ C) $6\sqrt{3}$
D) $\sqrt{102}$ E) $5\sqrt{3}$

7. Sean $\vec{A}_x$ y $\vec{B}_y$ alabeados que forman 60°. Si $AB=AP=BQ$, calcule m∢ entre $\overline{AB}$ y $\overline{PQ}$.



A) 37° B) 53° C) 60°
D) 45° E) 30°

8. Se tienen los rayos AX y BY que se cruzan formando un ángulo recto, siendo AB la perpendicular común. Sobre AX se ubica el punto C y sobre BY el punto D, tal que $AC^2+BD^2+AD^2+BC^2=18\ cm^2$. Calcule CD.

A) 3 B) $3\sqrt{2}$ C) 2
D) 4 E) $2\sqrt{3}$

9. Por el vértice A de un triángulo equilátero AMO se levanta la perpendicular AB al plano AMO. Calcule la distancia de A al plano BMO si $AB=AM=4\sqrt{21}$.

A) 14 B) 12 C) 15
D) 10 E) 18

10. Se tiene un hexágono regular $ABCDEF$, de lado a, y un triángulo equilátero CDL que están en planos perpendiculares. Calcule el área del triángulo ELA.

A) $a^2\sqrt{111}$ B) $\frac{a^2\sqrt{111}}{8}$ C) $a\sqrt{111}$
D) $a^2\sqrt{11}$ E) $6a^2$

NIVEL INTERMEDIO

11. Se tiene un cuadrado $ABCD$ y un triáng lo equilátero COF, que están contenid en dos planos perpendiculares, sien $\{O\}=\overline{CM}\cap\overline{BN}$; M y N son los puntos medi de AB y AD. Calcule FB si $FD=\sqrt{15}$.

A) 5 B) 4 C) 3
D) 2 E) 1

12. En el espacio se dan los rayos AX y BY qu se cruzan formando un ángulo recto tal qu su perpendicular común es AB. En los ray AX y BY se encuentran los puntos M y P, re pectivamente, de tal manera que $AM=2$ $BP=4$. Calcule la distancia del punto med de AB hacia MP si $AB=4$ cm.

A) 1/2 B) 1 C) 3/2
D) 2 E) 5/2

13. Indique cuál de las afirmaciones es verd dera.

A) Si una recta es paralela a dos planos s cantes, es paralela a la intersección.
B) La distancia entre dos rectas paralel situadas en planos paralelos es igual la distancia entre los planos.
C) Una recta es perpendicular a la inte sección de dos planos; luego, es pe pendicular a uno de los planos.
D) Una recta paralela a un plano es paral la a todas las rectas del plano.
E) Si dos rectas son oblicuas a un plan es siempre posible pasar un plano p dichas rectas.

14. Por el vértice C de un triángulo ABC se levanta la perpendicular CF al plano del triángulo, tal que $CF=4{,}8$ cm. Calcule la medida del ángulo diedro formado por los planos BFM y ABC si M es punto medio de AC, $AB=8$, $BC=6$ y $AC=10$.

A) 45° B) 37° C) 53°
D) 60° E) 75°

15. Sea el rectángulo $PQRT$ y el triángulo rectángulo QHT, recto en H, los cuales están en diferentes planos. Calcule la medida del ángulo PHR.

A) 60° B) 45° C) 90°
D) 120° E) 105°

16. Se tiene un hexágono regular $ABCDEF$ de 4 cm de lado y centro O. Se levanta la perpendicular OT al plano del hexágono, de modo que el ángulo diedro T-AB-O mide 60°. Calcule la distancia de O al plano TAB.

A) 3 B) 4 C) 1
D) 2 E) $\sqrt{3}$

17. Un cuadrado $ABCD$ y un triángulo equilátero BFM están contenidos en dos planos perpendiculares, siendo M el punto medio de CD. Calcule AF si $CF=2\sqrt{5}$.

A) $3\sqrt{6}$ B) $3\sqrt{5}$ C) $4\sqrt{5}$
D) $4\sqrt{6}$ E) $2\sqrt{7}$

18. Se tiene un círculo de centro O y radio 5 cm, en el cual se traza una cuerda AB por donde pasa el rectángulo $ABCD$ que se encuentra en un plano perpendicular al plano del círculo. Calcule OM si M es un punto de $\overline{CD}$, tal que $3DM=5CM$, $AB=8$ cm y $AD=12$ cm.

A) $\sqrt{151}$ B) $\sqrt{154}$ C) $\sqrt{153}$
D) 10 E) $4\sqrt{10}$

19. Un hexágono regular $ABCDEF$ de lado 2 cm y un cuadrado $ABNM$ están contenidos en dos planos perpendiculares. Calcule el área de la región BEM.

A) $2\sqrt{15}$ B) $2\sqrt{7}$ C) $3\sqrt{11}$
D) $3\sqrt{15}$ E) $4\sqrt{10}$

20. Se tiene un cuadrado $PQRT$ de lado 4 cm donde M, B, y C son los puntos medios de los lados PQ, PT y TR, respectivamente. Por M se levanta la perpendicular MA al plano del cuadrado, tal que $MA=4$ cm. Calcule el área del triángulo ABC.

A) $2\sqrt{6}$ B) $4\sqrt{3}$ C) $6\sqrt{5}$
D) $4\sqrt{5}$ E) $3\sqrt{6}$

21. Se tiene una circunferencia de diámetro AB, por A se levanta AE perpendicular al plano del círculo. Siendo C un punto de la circunferencia, calcule la distancia del centro al punto medio de EC si $AE^2+BC^2=16$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

22. Se tiene un trapezoide simétrico $ABCD$ donde las diagonales se cortan en O, tal que $CO=8AO$. Calcule la distancia de C hacia un plano sabiendo que las distancias de A, B y D hacia dicho plano son 5; 6 y 8 cm.

A) 7 B) 12 C) 15
D) 23 E) N.A.

23. Las caras de un ángulo triedro miden 45°, 45° y 37°. Calcule la medida del ángulo diedro opuesto a la menor cara.

A) 30° B) 45° C) 60°
D) 90° E) 53°

24. Se tiene un ángulo diedro que mide 90°, formado por el cuadrado *ABCD* y el rectángulo *RCEM*; *D* es un punto de *CE*. Calcule *AM* si $AB=DE=4$ y $CR=2$.

A) $\sqrt{37}$ B) $\sqrt{31}$ C) $\sqrt{35}$
D) $\sqrt{34}$ E) 5

25. Un rectángulo *ADRQ* y un trapecio isósceles *ABCD* forman un ángulo diedro que mide 90°. Calcule la medida del ángulo formado por *FM* y el plano del rectángulo siendo *F* punto medio de *BC* y *M* centro del rectángulo. Además, se sabe que $AB=CD=13$, $BC=11$ y $AD=21$; *AQ* tiene el valor de la altura del trapecio.

A) 30°
B) 15°
C) 22°30'
D) 19°30'
E) 28°30'

26. Se tienen los cuadrados *ABCD* y *ABEF* de lado 8 cm que forman un ángulo diedro de 60°. Calcule el área de la proyección de la región *ABN* sobre el plano *ABCD* si *N* es el punto medio de *EF*.

A) 32 B) 16 C) 8
D) 12 E) 24

27. Se tiene un punto *F* exterior al plano del triá gulo rectángulo *ABC*, tal que $FA=FB=F$ Calcule la distancia de la proyección de sobre dicho plano hacia *B* si $AC=18$ cm.

A) 4 B) 4,5 C) 12
D) 6 E) 9

28. Las caras de un ángulo triedro miden 45 45° y 60°; por su vértice se ha trazado ur recta perpendicular a una de las caras igu les. Calcule la medida del ángulo formad por dicha recta y la arista que no se encue tra en la cara mencionada.

A) 45° B) 60° C) 30°
D) 53° E) 37°

29. Se tiene *BP* perpendicular al plano qu contiene al cuadrado *ABCD*, y *M* es punt medio de $\overline{AD}$ $(\overline{BM}\cap\overline{AC}=\{Q\})$. Ubicand como centro al punto *P* se traza un arc que contiene a los puntos *A* y *C*. Si $AB=8$ la $m\widehat{AC}=60°$, calcule el área de la regió triangular *QPC*.

A) 16 B) $64\sqrt{2}$ C) $16\sqrt{3}$
D) $32\sqrt{3}$ E) $\dfrac{64\sqrt{3}}{3}$

30. La proyección de un triángulo *ABC* sobr un plano *H* es el triángulo *AQR*; las pro yectantes *BQ* y *CR* tienen $2a$ y a de longi tud, respectivamente. Calcule la distanci de incentro del triángulo *ABC* al plano *H* s $AQ=QR=AR=2a$.

A) $3a/2$ B) $4a/3$ C) $2a$
D) $a/2$ E) a

PROBLEMAS PROPUESTOS

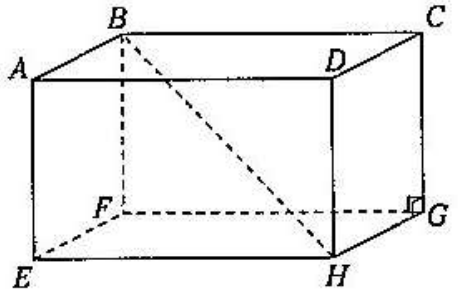
NIVEL BÁSICO

Señale verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

I. Existen 5 poliedros regulares.
II. Existen 3 poliedros regulares cuyas caras son triángulos.
III. Las caras del dodecaedro regular son pentagonales.
IV. El ángulo formado por las diagonales de un octaedro regular mide 90°.

A) VFVF B) VVVV C) VVFF
D) VVVF E) FVVV

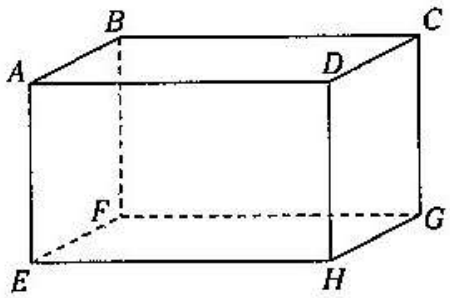
. Del cubo de arista de longitud a, calcule la distancia entre $\overline{BH}$ y $\overline{GC}$.



A) $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ B) $\frac{a}{2}$ C) $a\sqrt{3}$

D) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{a}{3}$

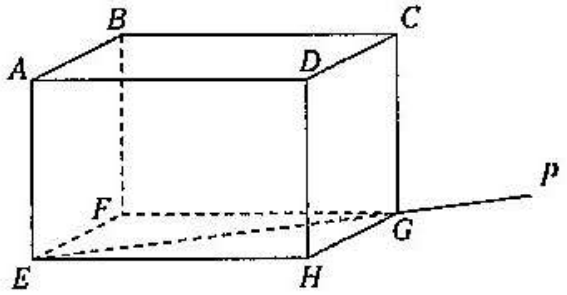
. Del hexaedro regular de arista ℓ, calcule la distancia del vértice D a la diagonal $\overline{BH}$.



A) $\frac{a}{4}$ B) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ C) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

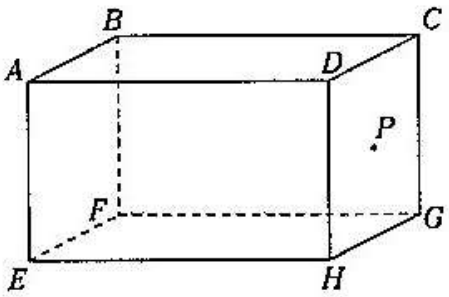
D) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{a}{3}$

4. Del cubo $ABCD$-$EFGH$, $AP=12$. Halle la distancia entre los puntos medios de $\overline{EG}$ y $\overline{CP}$



A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 3

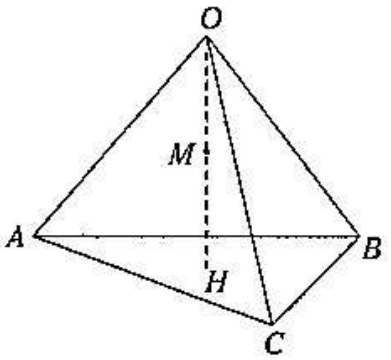
5. Del hexaedro regular de arista $2a$, que se muestra en el gráfico, donde P es centro de la cara $CGHD$. La recta $\overleftrightarrow{AP}$ contiene al punto O que pertenece al plano $EFGH$. Calcule PO



A) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ B) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ C) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$

D) $a\sqrt{6}$ E) $2a\sqrt{3}$

6. En el tetraedro regular, M es punto medio de la altura $\overline{OH}$. Calcule la suma de las caras del triedro M-ABC.



A) 120° B) 180° C) 270°
D) 240° E) 245°

7. Se tiene un cubo $ABCD$-$EFGH$ de arista a. Calcule la m∢ entre $\overline{BO}$ y $\overline{PG}$, siendo P y O los centros de las caras $ABFE$ y $DCGH$.

A) 30° B) 60° C) 15°
D) $\arccos\frac{3}{2}$ E) $\arccos\frac{2}{3}$

8. Calcule la suma de medidas de los ángulos que concurren en un vértice de un icosaedro regular.

A) 315° B) 135° C) 270°
D) 300° E) 145°

9. Se tiene un cubo de arista a, sobre una de sus diagonales se ubica el punto P, tal que la suma de los cuadrados de las distancias de dicho punto hacia los vértices de la base es $4a^2$. Calcule la distancia de P hacia dicha base.

A) $\frac{3a}{5}$ B) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{2a}{5}$
D) $\frac{5a}{3}$ E) $\frac{6a}{5}$

10. Se tiene un cubo $ABCD$-$EFGH$ cuya arista es igual a 6. Si M es el punto medio de $\overline{AB}$ y P el punto de intersección de $\overline{AG}$ y $\overline{MH}$, calcule el área de la proyección de la región triangular APM sobre la cara $EFGH$.

A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B) 3 C) $\frac{3}{4}\sqrt{6}$
D) $5\frac{\sqrt{6}}{2}$ E) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$

NIVEL INTERMEDIO

11. En un octaedro regular se unen los baricentros de sus caras, formándose un sólido. Calcule $\frac{\mathbb{V}_{\text{sólido}}}{\mathbb{V}_{\text{octaedro}}}$.

A) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ B) $\frac{2}{9}$ C) $\frac{\sqrt{6}}{4}$
D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

12. Calcule el volumen de un cubo sabiendo que el volumen del tetraedro regular que se forma al unir cuatro de sus vértices es igual a 5.

A) 15 B) 10 C) 12
D) 8 E) 13

En un tetraedro regular $ABCD$ de altura AO, M punto medio de AO. Calcule la suma de las aristas laterales del tetraedro $MBCD$ (M es vértice) si $BD=1$.

A) 12 B) 10 C) 6
D) 8 E) 5

Un tetraedro regular, en el cual una de sus aristas mide 4, se proyecta sobre un plano perpendicular a dicha arista; el área de dicha proyección es $4\sqrt{2}$. Calcule el volumen de dicho tetraedro.

A) 36 B) $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ C) 20
D) 25 E) 18

Se tiene un octaedro regular con 8 de arista. Halle el área total del sólido que resulta de unir los puntos medios de las aristas del octaedro.

A) $96+32\sqrt{3}$ B) $20(\sqrt{2}+2)$ C) $15\sqrt{3}$
D) 22 E) $14\sqrt{3}$

Al unir los puntos medios de las aristas de un tetraedro regular se determina un nuevo sólido. Halle la relación de volúmenes de estos sólidos.

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{9}$
D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{2}$

Si el volumen de un tetraedro regular es $\mathbb{V}$, halle el volumen del tetraedro regular inscrito.

A) $\frac{\mathbb{V}}{18}$ B) $\frac{\mathbb{V}}{9}$ C) $\frac{\mathbb{V}}{4}$
D) $\frac{\mathbb{V}}{3}$ E) $\frac{\mathbb{V}}{27}$

18. En un dodecaedro regular, la suma de las longitudes de sus aristas es $(\sqrt{5}-1)$. Calcule la suma de las longitudes de todas las diagonales de sus caras.

A) 4 B) 5 C) 1
D) 2 E) 3

19. Se tiene un poliedro formado por 2 caras pentagonales y 6 cuadrangulares. Calcule el número de aristas de dicho poliedro.

A) 17 B) 18 C) 15
D) 19 E) 16

20. Un poliedro convexo está limitado por $3n$ regiones triangulares, $3n$ regiones cuadrangulares y $5n$ regiones pentagonales, tal que la suma de las medidas de los ángulos de todas las caras es 4320. Calcule el número de caras

A) 12 B) 13 C) 10
D) 14 E) 11

21. Dos poliedros tienen el mismo número de caras, donde la diferencia de sus vértices es 13. Calcule la diferencia de sus números de aristas.

A) 7 B) 8 C) 5
D) 9 E) 6

22. En un octaedro regular *M-ABCD-N* se ubica el punto medio L de la arista $\overline{DC}$; luego, se traza la mediana ME de $\triangle LMC$ y en las aristas AB y $\overline{BC}$ se ubican los puntos medios S y N, respectivamente. Calcule la medida del ángulo que determina $\overrightarrow{ME}$ y $\overrightarrow{SN}$.

A) $2\operatorname{arcsen}\left(\frac{3\sqrt{26}}{26}\right)$

B) $\operatorname{arccot}\left(\frac{\sqrt{34}}{2}\right)$

C) $\operatorname{arcsen}\left(\frac{3\sqrt{26}}{26}\right)$

D) $2\arccos\left(\frac{3\sqrt{26}}{26}\right)$

E) $2\arctan\left(\frac{\sqrt{34}}{2}\right)$

23. Se tiene un octaedro regular *N-ABCD-K*. Calcule el diedro de dos caras adyacentes.

A) $\arctan\left(\frac{7\sqrt{57}}{57}\right)$

B) $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$

C) $\operatorname{arcsen}\left(\frac{7\sqrt{58}}{58}\right)$

D) $\operatorname{arcsec}\left(\frac{\sqrt{58}}{7}\right)$

E) $\arccos\left(\frac{5\sqrt{58}}{58}\right)$

24. Calcule el área de la región determinada por el plano que pasa por dos vértices no consecutivos de un octaedro regular y el baricentro de una de las caras de dicho octaedro si la longitud de la arista es L.

A) $\frac{L^2}{2}$ B) $\frac{L^2}{3}$ C) $\frac{L^2\sqrt{2}}{2}$

D) $L^2\sqrt{2}$ E) $\frac{L^2\sqrt{3}}{2}$

25. Se tiene un octaedro regular *P-ABCD-Q*, en el cual se inscribe una circunferencia en la cara DPC, siendo E la intersección de DO con la circunferencia de centro O y $PD=3$. Calcule $AE^2+EC^2-QE^2$.

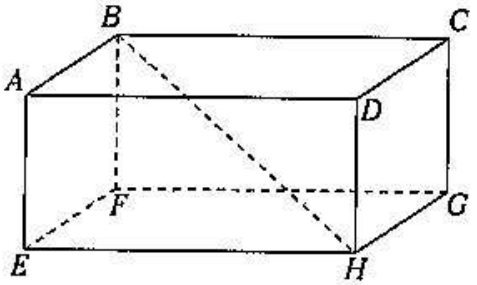
A) $\sqrt{14}$ B) $\frac{21}{4}$ C) $\frac{\sqrt{21}}{2}$

D) $\sqrt{13}$ E) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

PROBLEMAS PROPUESTOS

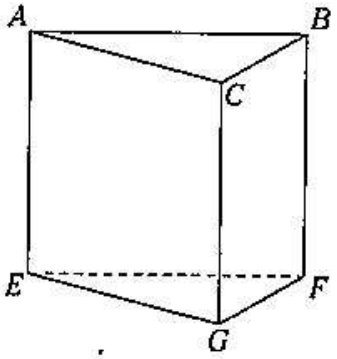
NIVEL BÁSICO

1. Del ortoedro, $BH=4$; luego, este forma con las caras laterales ángulos de 30° y 45°. Calcule el volumen.



A) $4\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{3}$ C) $8\sqrt{2}$
D) $3\sqrt{3}$ E) $4\sqrt{5}$

2. En el prisma regular, $BG=4$ y la medida del ángulo de esta con la base es 60°. Calcule el volumen.



A) 4 B) 6 C) 8
D) 2 E) 10

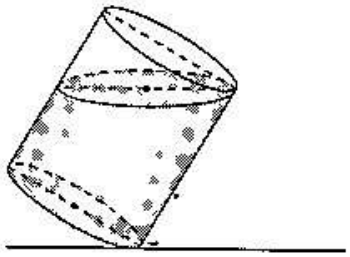
3. Calcule el volumen de un paralelepípedo recto si se sabe que el producto de las áreas de todas sus caras es A.

A) $\sqrt[4]{A}$ B) $\sqrt{A}$ C) $\sqrt[3]{A}$
D) A^2 E) $\sqrt{\frac{A}{2}}$

4. Halle el volumen de un prisma cuadrangular regular si sus diagonales forman un ángulo de 30° con las caras laterales, además, el lado de la base es 1.

A) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
D) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ E) $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

5. En el cilindro de revolución, la altura es el doble del diámetro de la base, el cilindro ocupa 3/4 de su capacidad. Calcule la razón de alturas.



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$
D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{5}{6}$

6. Calcule el volumen de un prisma triangular si el área de una cara lateral es 30 y la distancia de la arista opuesta a dicha cara es 5.

A) 84 B) 75 C) 72
D) 48 E) 52

7. Un recipiente de forma cúbica contiene $14\,m^3$ de agua. Se introduce un cubo cuya arista es la mitad del anterior y el agua se eleva hasta el ras del recipiente. Halle su volumen.

A) 16 B) $\frac{20}{3}$ C) $\frac{54}{5}$
D) $\frac{63}{4}$ E) $\frac{72}{13}$

Un prisma recto tiene por base un trapecio isósceles, cuyos lados no paralelos miden 13 y sus bases 10 y 20. Halle la relación entre el área lateral y el área total si la altura del prisma es igual a la altura de la base.

A) $\frac{7}{8}$ B) $\frac{5}{9}$ C) $\frac{4}{9}$
D) $\frac{7}{15}$ E) $\frac{28}{43}$

Halle el volumen del cilindro de revolución circunscrito a una pirámide regular cuadrangular de volumen $\mathbb{V}$.

A) $\frac{9\pi\mathbb{V}}{4}$ B) $\frac{5\pi\mathbb{V}}{4}$ C) $\frac{2\pi\mathbb{V}}{9}$
D) $\frac{3\pi\mathbb{V}}{2}$ E) $\frac{\pi\mathbb{V}}{4}$

Un vaso cilíndrico con 20 de diámetro y 40 de altura está lleno de agua. Si se vierte dicha agua en otro vaso de 40 de diámetro, ¿hasta qué altura subirá el agua de este último vaso?

A) 8 B) 12 C) 5
D) 15 E) 10

NIVEL INTERMEDIO

Se tiene un tronco de cilindro oblicuo cuyas bases son iguales y su ángulo diedro es 60°. Halle su volumen si sus generatrices mayor y menor son 9 y 3, respectivamente, y su sección recta es un círculo.

A) $2\pi\sqrt{3}$ B) $3\pi\sqrt{2}$ C) $\pi\sqrt{2}$
D) $4\pi\sqrt{3}$ E) $\frac{81\pi}{2}$

12. Calcule el volumen de un prisma recto de altura 10 sabiendo que la base forma un ángulo diedro con un plano que pasa por una de sus aristas, que mide 45° y que el área de la sección determinada por dicho plano es $14\sqrt{2}$.

A) 27 B) 140 C) 54
D) 72 E) 48

13. El área total de un paralelepípedo rectangular de 4 de altura es cuatro veces una de las superficies diagonales correspondiente a una de las aristas laterales. Si la diagonal de la base es igual a la altura, calcule el área total del paralelepípedo.

A) 80 B) 64 C) 50
D) 20 E) 100

14. Se tiene un tronco de cilindro cuyas bases son dos elipses iguales que forman un ángulo diedro de 60°. Si la generatriz mayor mide 6 y la menor es nula, halle el volumen del tronco de cilindro.

A) $\frac{64\pi}{3}$ B) $\frac{81\pi}{4}$ C) $\frac{72\pi}{5}$
D) $\frac{50\pi}{3}$ E) $\frac{78\pi}{5}$

15. En un cilindro de revolución interiormente se construyen dos conos en las bases del cilindro y con la misma altura de este. Calcule la razón de volúmenes de la intersección de los conos con el cilindro.

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{2}{7}$
D) $\frac{1}{10}$ E) $\frac{2}{9}$

16. Calcule el área lateral de un prisma oblicuo cuya sección recta es un hexágono regular de $24\sqrt{3}a^2$ de área y la arista lateral forma con la base un ángulo que mide 60°. La altura del prisma es $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

A) 18 B) 54 C) 72
D) 36 E) 73

17. ¿En qué relación se hallan los volúmenes del octaedro regular y del prisma recto obtenido al unir los puntos medios de las aristas laterales del octaedro?

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{6}{5}$
D) $\frac{7}{3}$ E) $\frac{8}{3}$

18. Calcule el volumen del sólido conjugado en un octaedro regular de arista 3.

A) $18\sqrt{2}$ B) $18\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{2}$
D) $20\sqrt{3}$ E) 25

19. Calcule el volumen de un prisma recto de altura $5\sqrt{3}$, teniendo como base un cuadrilátero inscriptible formado por un triángulo equilátero de lado 6 y un triángulo isósceles.

A) 20 B) 180 C) $15\sqrt{3}$
D) $20\sqrt{3}$ E) 25

20. Calcule la razón de los volúmenes de un prisma recto triangular y del poliedro formado al unir los centros de todas las caras.

A) 10 B) 8 C) 12
D) 15 E) 25

21. Calcule el volumen de un tronco de prisma oblicuo cuyas aristas laterales forman con la base 60° y miden 2; 3 y 5, además, el área de dicha base es $15\sqrt{3}$.

A) 225 B) 15 C) 200
D) 315 E) 405

22. Calcule el volumen de un paralelepípedo sabiendo que dos aristas de la base miden 5 y 8, y forman un ángulo de 60°. Además, la arista lateral mide 5 y forma con estos ángulos que miden 53°.

A) $12\sqrt{3}$ B) $20\sqrt{39}$ C) $24\sqrt{13}$
D) $12\sqrt{13}$ E) $24\sqrt{2}$

23. Dado un tronco de prisma triangular recto *ABC-DEF*, donde la base es equilátera de lado igual a 1 y las aristas $AD=4$, $BE=2$, $CF=3$. Si la prolongación de $\overline{FD}$ y $\overline{AC}$ se corta en P y la de $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ se corta en N, halle el volumen del sólido *BEN-CFP*.

A) $\frac{23\sqrt{3}}{12}$ B) $\frac{23}{12}$ C) $\frac{23\sqrt{2}}{12}$
D) $\frac{23}{6}$ E) $\frac{23}{5}\sqrt{3}$

24. Halle el volumen del tronco de cilindro recto circunscrito a una esfera si las generatrices máxima y mínima miden 6 y 2, respectivamente.

A) $\frac{9\pi}{2}$ B) 9π C) $\frac{9\pi}{4}$
D) $\frac{5\pi}{3}$ E) $\frac{4\pi}{3}$

En un ortoedro, el largo es el doble del ancho y la suma de las tres dimensiones es 14. Calcule la altura para que la superficie total tenga un área máxima.

A) 5 B) 7 C) 9
D) 11 E) 13

Se tiene un hexaedro regular *ABCD-EFGH*. Luego, se ubican los puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$, que son *M*, *N*, *P* y *Q*, respectivamente. Si $AB=4$, calcule el volumen del sólido *EMQ-GNP*.

A) $\frac{16}{3}$ B) $\frac{128}{3}$ C) $\frac{18}{3}$
D) $\frac{20}{3}$ E) $\frac{64}{3}$

27. La base de un prisma recto *ABCD-EFGH* es una región rombal cuya área es $\mathbb{S}_1$. Si las áreas de las regiones *ACGE* y *BDHF* son $\mathbb{S}_2$ y $\mathbb{S}_3$, respectivamente, calcule el volumen del prisma.

A) $\sqrt{\frac{\mathbb{S}_1 \cdot \mathbb{S}_2 \cdot \mathbb{S}_3}{2}}$

B) $\frac{\sqrt{\mathbb{S}_1 \cdot \mathbb{S}_2 \cdot \mathbb{S}_3}}{2}$

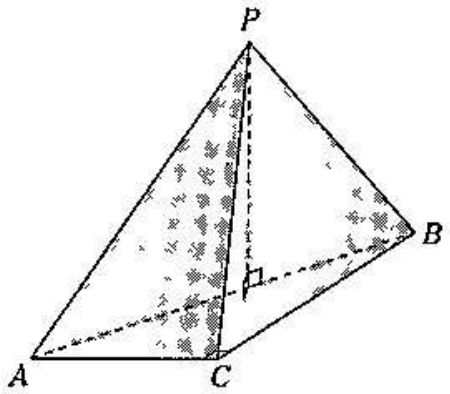
C) $\frac{\sqrt{\mathbb{S}_1 \cdot \mathbb{S}_2 \cdot \mathbb{S}_3}}{3}$

D) $\sqrt{\frac{\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2 + \mathbb{S}_3}{\mathbb{S}_1 \cdot \mathbb{S}_2 \cdot \mathbb{S}_3}}$

E) $\sqrt{\frac{\mathbb{S}_1 \cdot \mathbb{S}_2 \cdot \mathbb{S}_3}{3}}$

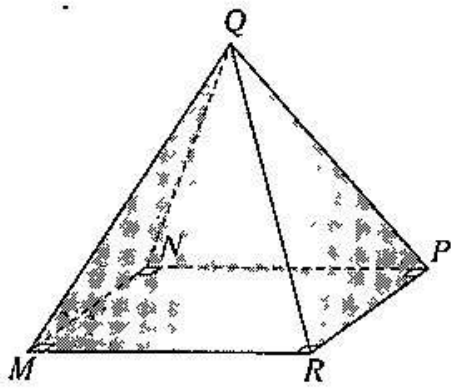
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. De la pirámide $P\text{-}ABC$, $AC=6$, $BC=8$ y cada una de las aristas laterales es 13. Calcule el volumen de dicha pirámide.



A) 14 B) 48 C) 24
D) 96 E) 54

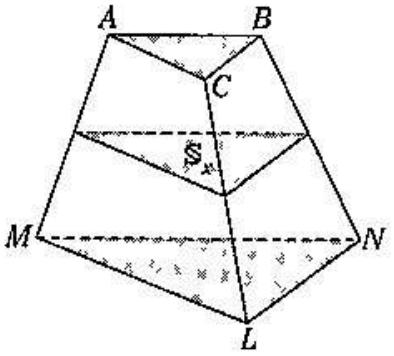
2. En la pirámide regular, la medida de los ángulos que forman la arista lateral y cara lateral con la base son complementarios. Halle el volumen del sólido si el área de la base es $4\sqrt{2}$.



A) $\frac{18\sqrt{2}}{5}$ B) $\frac{8}{3}$ C) $24\sqrt{2}$

D) $\frac{22\sqrt{2}}{3}$ E) $22\sqrt{3}$

3. En el tronco de pirámide cuyas bases determinan áreas de 9 y 25, piden $\mathbb{S}_x$ equidistante de las bases.

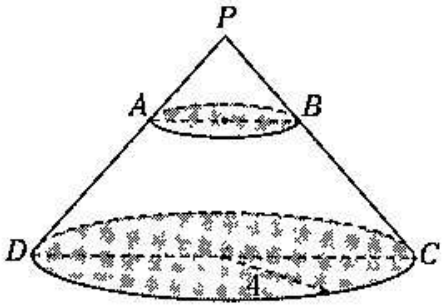


A) 12 B) 14 C) 15
D) 16 E) 17

4. La generatriz de un cono recto mide 5 y la superficie lateral desarrollada forma un sector circular de 216°. Calcule el volumen de dicho cono.

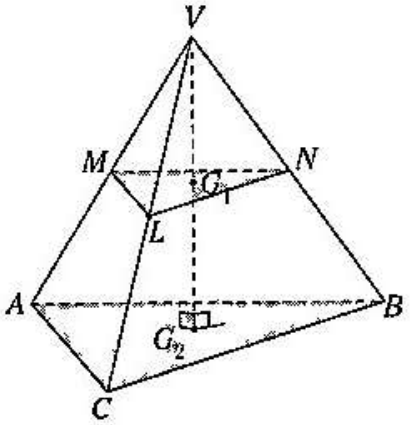
A) 42π B) 36π C) 24π
D) 12π E) 15π

5. En el cono de revolución cuya altura es 3, se traza un plano secante al cono y paralelo a su base, donde el área de la sección es igual al área lateral del cono truncado. Calcule la distancia del vértice a la sección.



A) 12 B) $\sqrt{5}$ C) 15
D) 14 E) 10

6. En la pirámide regular se traza un plano secante y paralelo a la base, de tal manera que divide la superficie lateral en regiones equivalentes. Calcule en qué relación es dividida la altura por este plano secante.



A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$

D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{4}{5}$

7. En una pirámide S_{ABC}, el pie de la altura coincide con el centro del circuito inscrito en la base. Los lados de la base $AB=120$, $BC=39$, $AC=111$, la arista $SA=4$. Halle el volumen del sólido.

A) 1514 B) 1421 C) 1217
D) 1112 E) 1232

8. A una pirámide de 6 de altura se le traza un plano paralelo a la base. ¿A qué distancia del vértice debe hacerse el trazado para que la pirámide deficiente sea la octava parte del total?

A) 2 B) 4 C) $\frac{1}{2}$

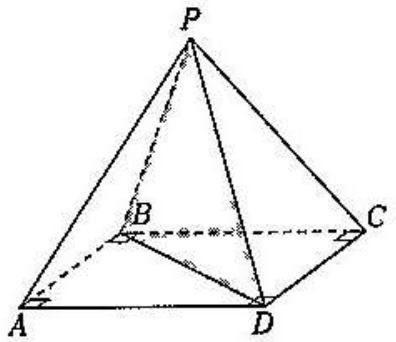
D) 3 E) $\frac{5}{4}$

9. Se tiene un tronco de cono recto, cuyas áreas de las bases miden 1 y 9, respectivamente. Se traza un plano paralelo a las bases por el punto medio de la generatriz. Halle la razón de los volúmenes de los sólidos determinados.

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{3}$

D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{2}{3}$

10. De la pirámide regular, calcule el volumen si el área de la región sombreada es 12 y la longitud de la arista lateral es 5.



A) 14 B) 12 C) 15
D) 24 E) 32

NIVEL INTERMEDIO

11. Una pirámide tiene una altura de 8. Calcule a qué distancia del vértice debe pasar un plano paralelo a la base para que la sección determinada divida a la pirámide en dos sólidos cuyos volúmenes estén en la relación de 27 a 37.

A) $\frac{5}{8}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{5}{2}$

D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{2}{3}$

12. Calcule a qué distancia del vértice de una pirámide triangular, cuya altura es 3, se debe trazar un plano paralelo a la base para que las dos partes resultantes estén en relación de 8/19.

A) 1,3 B) 1,7 C) 1,8
D) 2,1 E) 1,5

13. Halle la altura de un cilindro recto circular de volumen máximo inscrito en un cono de revolución que tiene 5 de radio y 12 de altura.

A) 4 B) 5 C) 7
D) 6 E) 8

14. Se tiene una pirámide de 270 de volumen, su altura se divide en tres partes iguales y por estos puntos se trazan planos paralelos a la base. Calcule el volumen intermedio.

A) 12 B) 15 C) 16
D) 14 E) 70

15. Se construye un cono circular con un sector de 120° de ángulo central y radio R. Calcule el área de la superficie total del cono resultante.

A) $2\pi\sqrt{3}R^2$ B) $\frac{4\pi}{9}R^2$ C) $\frac{3\pi}{4}R^2$
D) $5\pi\sqrt{3}R^2$ E) $2\pi\sqrt{2}R^2$

16. Se tiene un cono truncado de revolución en el cual se encuentran inscritas dos esferas tangentes exteriores y de radios 1 y 3. Halle el área lateral del cono truncado.

A) 10π B) 9π C) 12π
D) 15π E) $\frac{160\pi}{3}$

17. Se tiene un tronco de pirámide de bases cuyas áreas son 4 y 25. Halle el área de la sección plana equidistante de las bases.

A) 1 B) $\frac{49}{4}$ C) 6
D) 8 E) 10

18. Un tronco de pirámide tiene por bases áreas de 27 y 147, y de altura 12. ¿A qué distancia de la base menor se debe trazar un plano paralelo a las bases de tal manera que los sólidos resultantes estén en la relación de $\frac{189}{127}$?

A) $\frac{49}{4}$ B) $\frac{25}{4}$ C) $\frac{36}{9}$
D) 9 E) 25

19. Un sector circular equivalente a una región cuadrada cuyo lado mide $6\sqrt{\pi}$ tiene un ángulo central que mide 10°. Si dicho sector circular es el desarrollo de la superficie lateral de un cono, calcule el área de la superficie total de dicho cono.

A) 20π B) 30π C) 32π
D) 37π E) 42π

20. En una pirámide triangular regular, los inradios de la base y de una cara lateral miden 2 y 3, respectivamente. Calcule el área de la superficie lateral de la pirámide.

A) $144\sqrt{3}$ B) $148\sqrt{3}$ C) $18(\sqrt{7}+1)$
D) $128\sqrt{3}$ E) $168\sqrt{3}$

21. Se tiene una pirámide triangular regular $V\text{-}ABC$, donde $VA=AB$. Sea O centro de la esfera inscrita de la pirámide y M punto medio de la altura VH de la pirámide. Calcule la razón de volúmenes de las pirámides $O\text{-}VBC$ y $M\text{-}ABC$.

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{6}$

D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{4}$

22. Se tiene un cubo $ABCD\text{-}EFGH$, en el cual se encuentra inscrito un cono de revolución cuya base está inscrita en la cara $ABCD$; por el punto M que pertenece a AE se traza un plano paralelo a $ABCD$. Calcule el volumen del cono oblicuo, cuya base es la sección determinada en el cono de revolución por el plano y su vértice es el punto E y $EM=2(AM)=4$.

A) $\frac{16}{3}\pi$ B) $\frac{18}{5}\pi$ C) $\frac{14}{3}\pi$

D) $\frac{19}{3}\pi$ E) $\frac{17}{3}\pi$

23. En un prisma regular $ABCD\text{-}EFGH$, en $\overline{AE}$ y $\overline{GC}$ se ubican los puntos M y N, respectivamente, tal que $MN // AC$ y $MN=AE=m$; P y Q son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{EG}$, respectivamente. Calcule el volumen de la pirámide $F\text{-}MPND$.

A) $\frac{m^3}{10}$ B) $\frac{2m^3}{3}$ C) $\frac{m^3}{9}$

D) $\frac{m^3}{12}$ E) $\frac{m^3}{11}$

24. Se tiene el hexaedro regular $ABCD\text{-}EFGH$ donde O es centro de la base $ABCD$, $OPCQ$ es un cuadrado, donde P y Q son puntos de BC y CD, respectivamente, G_1 baricentro de la región triangular EBG. Calcule la razón de volúmenes del hexaedro y el cono que tiene por vértice al punto G_1 y como base la circunferencia inscrita en $OPCQ$.

A) $\frac{24}{\pi}$ B) $\frac{18}{\pi}$ C) $\frac{39}{\pi}$

D) $\frac{27}{\pi}$ E) $\frac{72}{\pi}$

25. Se tiene un cono equilátero de vértice V y diámetro $\overline{AB}$. Si $M \in \overline{VB}$, $MB=1$ y la longitud del menor recorrido por la superficie del cono de A hacia M es 5, calcule el volumen del cono.

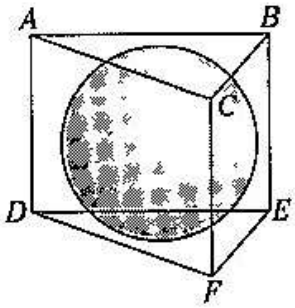
A) $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$ B) $10\sqrt{3}\pi$ C) $\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$

D) $\frac{10}{3}\sqrt{3}\pi$ E) $24\sqrt{2}\pi$

PROBLEMAS PROPUESTOS

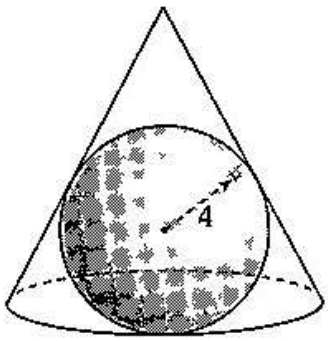
NIVEL BÁSICO

1. La esfera se encuentra inscrita en el prisma regular. Calcule el volumen del prisma si el radio de la esfera es 1.



A) $\sqrt{3}$ B) $6\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{2}$
D) $6\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{3}$

2. Del gráfico se tiene una esfera inscrita en un cono de revolución cuya altura es 10. Halle el volumen del cono.



A) 600π B) $\frac{800\pi}{3}$ C) $\frac{400\pi}{3}$
D) $\frac{226\pi}{3}$ E) $\frac{200\pi}{3}$

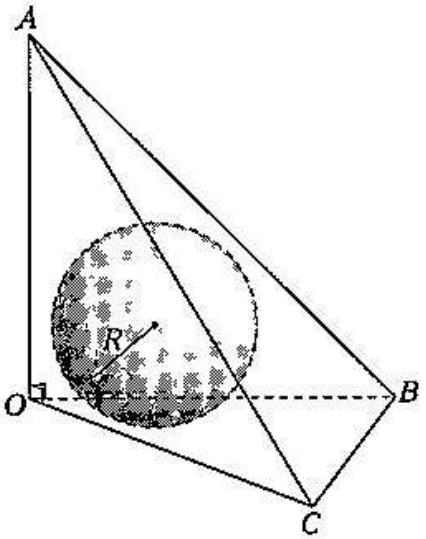
3. El lado de un tetraedro regular mide 6. Halle el área de la superficie esférica circunscrita al tetraedro.

A) 10π B) 54π C) 15π
D) 13π E) $\frac{15\pi}{4}$

4. ¿En qué relación están el radio de la esfera circunscrita con el de la inscrita en un tetraedro regular?

A) 7 B) 2 C) 5
D) 9 E) 3

5. En el gráfico, la esfera se encuentra inscrita, tal que $OA=4$; $OB=4$ y $OC=4$. Calcule R.



A) $\frac{16}{3}(\sqrt{2}-1)$ B) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ C) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$
D) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ E) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

6. ¿En qué relación están el radio de la esfera inscrita con el de la circunscrita en un cubo?

A) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

7. ¿En qué relación están el radio de la esfera inscrita con el de la circunscrita en un tetraedro regular?

A) $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ B) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ E) 5

8. Sea la base del cono circular recto y base de la semiesfera en donde los sólidos son equivalentes. Calcule el radio de la circunferencia generada por la intersección de la superficie lateral del cono y la esfera (r es radio de las bases).

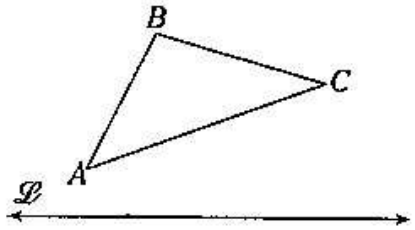
A) $\frac{r}{2}$ B) $\frac{r}{3}$ C) $\frac{3r}{5}$

D) $\frac{4r}{3}$ E) $\frac{r}{4}$

9. Se inscribe una esfera en un cilindro de revolución, y en el mismo cilindro se inscribe un cono cuya base es el mismo círculo. Calcule la razón entre los volúmenes del cilindro, la esfera y el cono.

A) 3; 2; 1 B) 3; 1; 2 C) 4; 3; 2
D) 4; 2; 3 E) 5; 4; 3

10. Del gráfico, la longitud de las proyectantes de A, B y C son 3; 7 y 5, respectivamente, y el área de la región triangular es 60. Calcule el volumen de triángulo ABC alrededor de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.

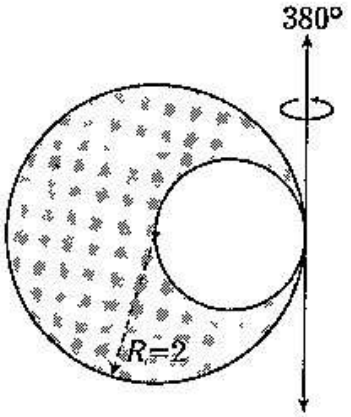


A) 300π B) $\frac{4\pi}{3}$ C) $\frac{2\pi}{5}$

D) $\frac{2\pi}{3}$ E) 600π

NIVEL INTERMEDIO

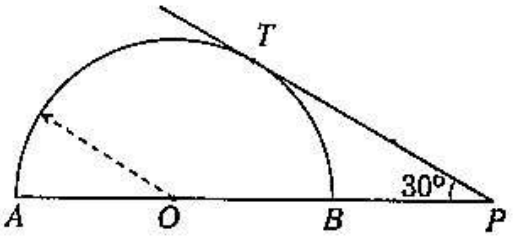
11. Halle el volumen generado por la reg sombreada sobre el eje $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.



A) $5\pi^2$ B) $3\pi^2$ C) $2\pi^2$

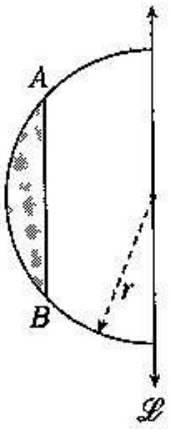
D) $25\pi^2$ E) $14\pi^2$

12. Calcule la razón entre la superficie gene da por PT alrededor de $\overline{AP}$ y superficie ger rada por el arco TB al rededor de $\overline{AP}$.



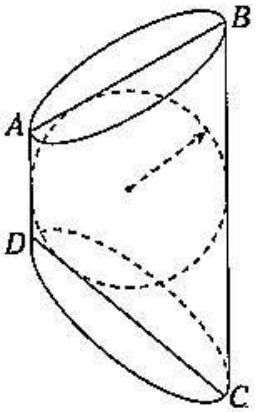
A) 2 B) 3/2 C) 4
D) 7 E) 8

13. Halle el volumen generado por la región sombreada alrededor de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ si $AB // \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ y $AB=6$.



A) 10π B) 36π C) 15π
D) 12π E) 24π

14. Halle el volumen del tronco de cilindro de bases elípticas, cuyos ejes son $AB=5$ y $CD=7$; además, el radio de la esfera inscrita es 4.



A) $\frac{15\pi}{2}$ B) 96π C) $\frac{4\pi}{3}$
D) $\frac{20\pi}{3}$ E) $\frac{5\pi}{4}$

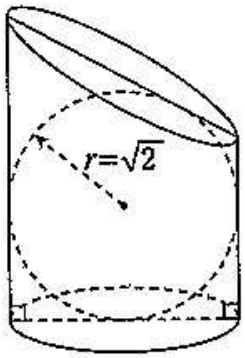
15. Halle el volumen de la uña cilíndrica inscrita a la esfera de radio R si dicha uña es parte de un cilindro equilátero inscrito en la misma esfera.

A) $\frac{R^3}{3}$ B) $\frac{R^2}{4}$ C) $\frac{3R^3}{4}$
D) $\frac{R^3\sqrt{2}}{3}$ E) $\frac{2R^3}{3}$

16. Calcule el volumen generado por el rombo $ABCD$ al girar 360° a la recta $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ que pasa por el punto C si $AB=5$; $BD=8$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} // \overline{BD}$.

A) 10π B) 144π C) 17π
D) 200π E) 18π

17. Halle el volumen del tronco del cilindro circunscrito a la esfera si los planos de la base forman un diedro de 45°.



A) $\frac{7\pi}{2}$ B) $\frac{8\pi}{3}$ C) $2\pi(\sqrt{2}+2)$
D) $\frac{4\pi}{3}$ E) $\frac{25\pi}{3}$

18. Se tienen dos esferas tangentes exteriores de radios 1 y 3. Calcule la razón entre la superficie total y el volumen del cono recto circunscrito a las esferas.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{4}$

19. Dado un triángulo equilátero ABC de lado 8, con un eje de rotación perpendicular al lado AC y a 8 unidades de C (A no pertenece al eje), halle el área de la superficie que resulta al rotar dicho triángulo 360° alrededor del eje.

A) $10\pi\sqrt{3}$ B) $12\pi\sqrt{2}$ C) $12\pi\sqrt{3}$
D) $16\sqrt{3}\pi$ E) 576π

20. Halle el volumen de un tronco de cilindro recto circunscrito a una esfera de radio 2. Considere que el diámetro de la base mide 6 y la generatriz mínima del tronco es nula.

A) $\frac{7\pi}{2}$ B) $\frac{7\pi}{5}$ C) $\frac{7\pi}{3}$
D) 2π E) 36π

21. En un tetraedro regular $V\text{-}ABC$ cuya arista es 6, su altura VH es el diámetro de una esfera de centro O. Calcule el volumen en común del sólido $OABC$ y la esfera.

A) $8\pi\sqrt{6}$ B) $\frac{4\pi}{3}$ C) $\frac{7\pi}{8}$
D) $\frac{5\pi}{6}$ E) 2π

22. Cuatro esferas son tangentes entre sí, tres de ellas forman la base. Calcule la altura máxima que generan las cuatro esferas si estas son congruentes y su radio es 10.

A) 16 B) 26,32 C) 16,32
D) 15 E) 18,32

23. En un tetraedro regular $A\text{-}BCD$, la suma de las inversas de sus alturas a sus respectiv caras opuestas es $\frac{1}{2}$. Halle la longitud d radio de la esfera inscrita a dicho tetraedr

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{3}{14}$ C) 2
D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{6}{7}$

24. Calcule el área del casquete esférico men de una esfera inscrita en un cono de rev lución de generatriz igual a 6 si la altura d cono con su generatriz forman 30°.

A) 2π B) $\frac{2\pi}{5}$ C) $\frac{2\pi}{3}$
D) 3π E) $\frac{2\pi}{7}$

25. En un rectángulo $ABCD$, la diagonal AC tie una longitud igual a $2a$ y forma con el la AB un ángulo de 30°. El rectángulo gira alr dedor de $\overleftrightarrow{BE}$ que es paralelo a $\overleftrightarrow{CA}$. Calcule volumen generado.

A) $4\pi a^3$ B) $3\pi a^3$ C) $5\pi a^3$
D) $\frac{8\pi}{5}a^3$ E) $7\pi a^3$

26. En una esfera se inscribe una pirámi triangular, de modo que la base se encue tra inscrita en una circunferencia máxima la altura del sólido es el radio de la esfe Las aristas básicas miden 4; 5 y 6. Halle área de la superficie lateral.

A) 210,89 B) 120,89 C) 150,89
D) 114,89 E) 160,89

7. Se tiene un triángulo isósceles de base 4 y altura 2 que gira alrededor de una perpendicular a la base trazada por un extremo de la base. Calcule el volumen generado.

A) $\frac{7\pi}{5}$ B) $\frac{2\pi}{5}$ C) $\frac{4\pi}{5}$

D) 16π E) $\frac{3\pi}{4}$

8. Se corta una esfera de radio $\sqrt{5}+2$ por un plano, de manera que la diferencia de las áreas de los casquetes esféricos obtenidos sea igual al área de la sección determinada por el plano. Halle a qué distancia del centro de la esfera se debe trazar dicho plano.

A) $\sqrt{2}+1$ B) $2\sqrt{3}-5$ C) $\sqrt{2}-1$

D) 1 E) $6\sqrt{3}$

29. Si $\overleftrightarrow{\mathscr{D}}_1 \perp \overleftrightarrow{\mathscr{D}}_2$, $\overleftrightarrow{\mathscr{D}}_1$ contiene al lado de un hexágono regular y $\overleftrightarrow{\mathscr{D}}_2$ es exterior a dicho hexágono, la razón de volúmenes determinados por la región hexagonal al girar una vuelta alrededor de $\overleftrightarrow{\mathscr{D}}_1$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{D}}_2$ es $\frac{\sqrt{3}}{3}$; el lado del hexágono mide 2. Calcule la distancia del vértice más cercano a $\overleftrightarrow{\mathscr{D}}_2$.

A) 1,4 B) 0,5 C) 1

D) 3 E) 2

30. En una esfera de radio R se tiene una zona esférica equivalente a un uso esférico, además, la altura de la zona es $\frac{R}{4}$. Calcule la medida del ángulo del uso esférico.

A) 26° 30 B) 45° C) 37°

D) 53° E) 30°

PROBLEMAS PROPUESTOS

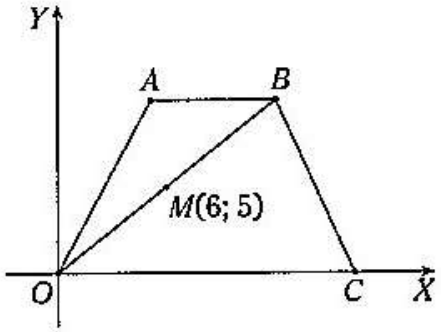
NIVEL BÁSICO

1. Se ubica $C(3; n)$ en la mediatriz de $\overline{AB}$ donde $A(7; 9)$ y $B(-5; 7)$. Calcule $\mathbb{A}_{\triangle ABC}$.

A) 74 B) $4\sqrt{2}$ C) $\frac{8}{3}\sqrt{3}$

D) $4\sqrt{3}$ E) 5

2. Calcule el área de la región trapecial isósceles $OABC$ si $OM=MB$.



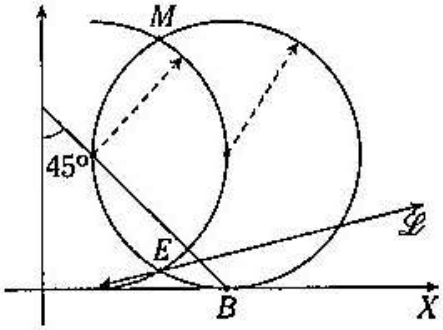
A) 24 B) 18 C) 48
D) 60 E) 120

3. Se tiene un paralelogramo $ABCD$, donde A es el origen de coordenadas, $B=(2; 6)$; $C=(10; 8)$ y en $\overline{BD}$ se ubica el punto P. Si el área de la región $ABCPD$ es cuatro veces el área de la región PCD, halle las coordenadas del punto P.

A) $(3; 4)$ B) $\left(\frac{28}{5}; \frac{18}{5}\right)$ C) $\left(\frac{4}{3}; 5\right)$

D) $(7; 2)$ E) $(5; 2)$

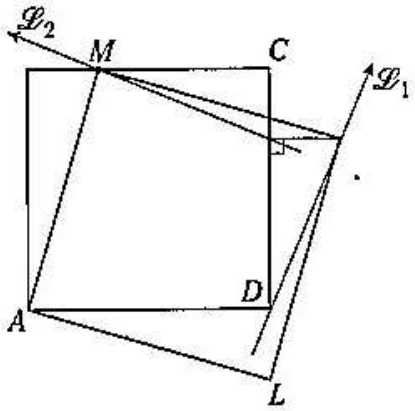
4. Calcule la pendiente de $\overleftrightarrow{\mathscr{D}}$ si B es punto de tangencia y $m\widehat{PM}=148°$.



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{4}{5}$

D) $\frac{7}{24}$ E) $\frac{1}{9}$

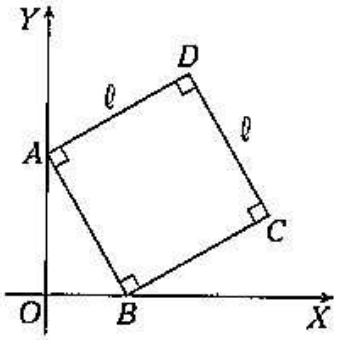
5. Si $ABCD$ y $AMNL$ son cuadrados, calcule el producto de pendientes de $\overleftrightarrow{\mathscr{D}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{D}_2}$.



A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $-\frac{3}{4}$

D) $-\frac{4}{3}$ E) -1

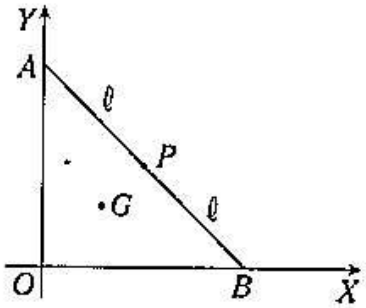
6. Si $AO=14$ y $OB=2$, calcule las coordenadas del baricentro de la región triangular BAC.



A) (3; 3) B) $\left(4; \frac{3}{2}\right)$ C) $\left(5; \frac{2}{5}\right)$

D) $\left(5; \frac{1}{2}\right)$ E) $\left(6; \frac{3}{4}\right)$

7. Halle la ecuación de $\overleftrightarrow{PG}$ si $AO=6$; $OB=9$ y G es baricentro de la región triangular AOB.



A) $4x-3y+2$
B) $3x-4y-2$
C) $4x^2-7y-22$
D) $x-3y-22$
E) $2x-3y=0$

8. Se tiene un triángulo donde las coordenadas de sus vértices son $(-1; -8)$, $(8; -5)$, $(4; 7)$. Halle las coordenadas de incentro de dicho triángulo.

A) (2; 3) B) (4; −3) C) (−1; −2

D) $\left(\frac{1}{2}; -2\right)$ E) $\left(\frac{1}{3}; 4\right)$

9. Calcule el área de la región limitada por rectas $\mathscr{L}_1$: $9x-2y-18$; $\overleftrightarrow{\mathscr{P}}_2$: $10x-11y-110$ y ejes de coordenadas.

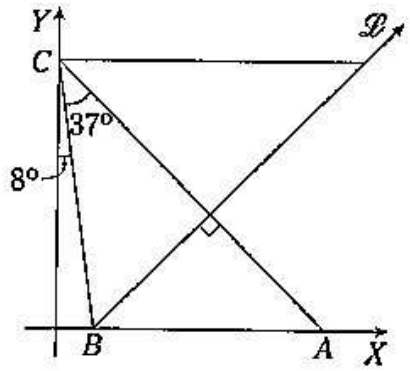
A) 10 B) 46 C) 12
D) 15 E) 18

NIVEL INTERMEDIO

10. Si $P(a; b)$ pertenece a $\overleftrightarrow{\mathscr{P}}$: $x+y-1$ y equidi de $\overleftrightarrow{\mathscr{P}}_1$: $x-y+8$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{P}}_2$: $x-y-3$, calcule $a \cdot b$.

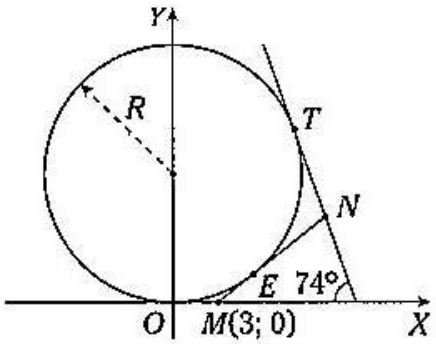
A) −3 B) $-\frac{35}{4}$ C) −4
D) 12 E) 10

11. En el gráfico, $AC=BD=7\sqrt{2}$. Calcule la ecu ción de $\overleftrightarrow{\mathscr{P}}$.



A) $5x-3y+1$ B) $4x+3y-2$ C) $7x+3y-1$
D) $5x+3y-2$ E) $x-y-1=$

2. Del gráfico, T, E y O son puntos de tangencia. Halle la ecuación de la recta $TE = R\sqrt{2}$.



A) $4x-2y-2$
B) $7x-3y-7$
C) $4x+2y-10$
D) $7x-4y+7$
E) $7y-24x-24=0$

3. Sean $A(2; 3)$, $B(4; 9)$ y $C(8; 1)$ coordenadas de los vértices de un triángulo. Calcule las coordenadas del circuncentro.

A) (6; 5) B) (5; 3) C) (2; 3)
D) (3; 2) E) (4; 3)

4. Sean (1; 2), (–2; 8), (5; 6) los vértices del triángulo. Determine las coordenadas del baricentro de su triángulo mediano.

A) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$ B) $\left(\frac{1}{4}; \frac{5}{4}\right)$ C) $\left(\frac{4}{3}; \frac{16}{3}\right)$
D) $\left(\frac{5}{2}; \frac{4}{3}\right)$ E) (2; 3)

5. Sean (–1; 1) y (3; 1) los vértices de un triángulo equilátero. Determine las coordenadas del tercer vértice.

A) (2; 3) B) $(1; \sqrt{3})$ C) $(1; 2\sqrt{3})$
D) $(1; 1+2\sqrt{3})$ E) $(1; -2\sqrt{3})$

16. En un paralelogramo $ABCD$, $A(1; 2)$, $B(3; 4)$ y $D(6; 5)$. Luego se ubica Q en la prolongación de $\overline{AC}$, tal que $AC=3(QC)$. Calcule la diferencia entre las áreas de las regiones ADC y BQC.

A) 1 B) 3 C) 5
D) 4/3 E) 7

17. En un triángulo de vértices $A(-4; 7)$, $B(4; 1)$ y $C(10; 9)$, halle la ecuación de la recta perpendicular a $\overrightarrow{AC}$.

A) $4x-3y+20$
B) $12x-3y+21$
C) $3x-2y+20$
D) $4x-2y+10$
E) $7x+y-29=0$

18. En un triángulo ABC, $A(-10; 2)$ y $B(6; 4)$. Si H es su ortocentro $H(5; 2)$, calcule las coordenadas de C.

A) (1; 2) B) (3; 4) C) (–4; 3)
D) (6; –6) E) (5; 2)

19. Determine la ecuación del lugar geométrico de un punto cuya distancia hacia $A(-6; 0)$ es el doble de su distancia hacia $B(6; 0)$.

A) $5x-3y+2$
B) $4x-2y+3$
C) $5x-2y-2$
D) $4x+2y-5$
E) $3x-y-6=0$

20. El punto $P(-2; 3)$ pertenece a una recta de pendiente positiva, la cual determina con los ejes cartesianos una región triangular cuya área es 12. Halle la ecuación de dicha recta.

A) $7x-2y+7$ B) $3x-2y+12$ C) $7x+3y-2$
D) $4x-3y+7$ E) $5x-3y+20$

21. Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3; 2)$ y que determina con los semiejes positivos una región triangular donde P es punto medio del lado correspondiente.

A) $2x+y+8=0$
B) $2x+3y-12=0$
C) $2x-y-8=0$
D) $y-2x-8=0$
E) $y-2x+4=0$

22. Calcule el área de la región trapecial limitada por la recta $3x+2y+4=0$, el eje X, y las rectas $x=1$ y $x=5$.

A) 26 B) 12 C) 15
D) 30 E) 36

23. Halle la ecuación geométrica del conjunto de puntos equidistantes de $A(2; 2)$ y $B(6; -8)$.

A) $2x+3y-20=0$
B) $2x+2y-20=0$
C) $3x+2y-20=0$
D) $3x+3y-20=0$
E) $2x-5y-23=0$

24. Sean $A(2; 2)$, $B(4; 8)$ y $C(6; 4)$ los vértices de un triángulo. Calcule las coordenadas del circuncentro.

A) $\left(\frac{37}{4}; \frac{1}{4}\right)$ B) $\left(\frac{37}{4}; \frac{37}{2}\right)$ C) $\left(\frac{37}{3}; \frac{37}{2}\right)$
D) $(37; 3)$ E) $(3; 5)$

25. Sean $A(2; 3)$, $B(3; 6)$ y $C(5; 4)$ los vértices de un triángulo. Halle la ecuación de la recta que contiene a la altura relativa a $\overline{AC}$.

A) $x+y=6$
B) $x-y=6$
C) $3x+y=15$
D) $x=2y$
E) $y=2x$

NIVEL BÁSICO

1. En las siguientes proposiciones, indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

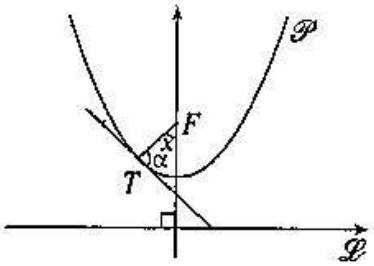
   I. Si dos parábolas tienen el mismo eje focal y contienen al mismo vértice, entonces tienen una misma directriz.

   II. La ecuación $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ representa la ecuación de una elipse si A y B tienen el mismo signo.

   III. Si en una hipérbola sus asíntotas son perpendiculares, entonces la hipérbola es equilátera.

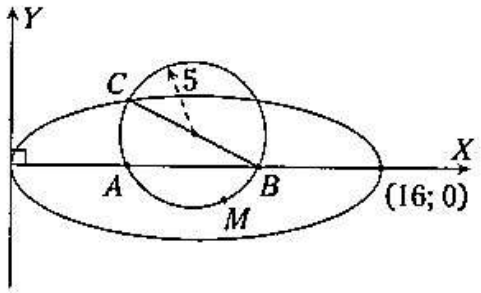
   A) FVV B) FFV C) FFF
   D) VVF E) VVV

2. Se muestra la parábola P de foco F y directriz $\overline{\mathscr{D}}$. Calcule x en función de α. Considere que T es punto de tangencia.



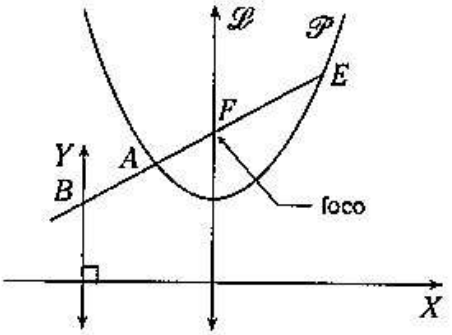
   A) $\frac{\alpha}{2}$ B) α C) $90°-\frac{\alpha}{2}$
   D) $90°-\alpha$ E) $180°-2\alpha$

3. En el gráfico, $m\widehat{AMB}=106°$, además, A y B son los focos de la elipse. Calcule las coordenadas del punto C.



   A) (4; 6) B) (4; 1) C) (5; 1)
   D) (2; 1) E) (3; 1)

4. Según el gráfico, el eje X es la directriz de la parábola P y $\overline{\mathscr{D}}$ es su eje focal. Si $AB=0{,}5$; $AF=1$ y $FE=3$, determine la ecuación de la parábola.



   A) $3\left(y-\frac{3}{2}\right)=(x-2\sqrt{3})^2$

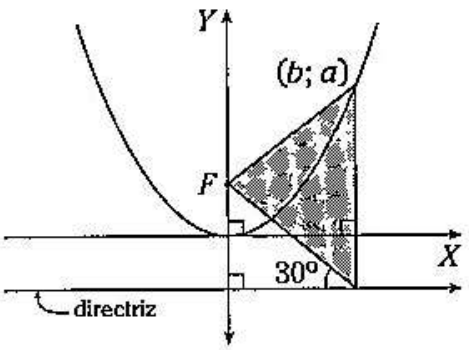
   B) $3\left(y-\frac{3}{4}\right)=(x+\sqrt{3})^2$

   C) $3\left(y-\frac{3}{4}\right)=\left(x-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2$

   D) $3(y-3)=(x-3)^2$

   E) $3\left(y-\frac{3}{2}\right)=(x-\sqrt{3})^2$

. En el gráfico, F es foco de la parábola. Determine el área de la región triangular en función de a.



A) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{7}$ B) $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$ C) $\frac{4a^3\sqrt{3}}{9}$

D) $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$ E) $\frac{4a^2\sqrt{3}}{9}$

. El foco de una parábola está ubicado en el punto (0; 1/4), la directriz es paralela al eje de las abscisas y estas determinan, en el eje de ordenadas, un segmento de longitud 0,25. Determine la ecuación de la parábola.

A) $x^2=-y$ B) $x^2=1$ C) $x^2=y+1$

D) $x^2=y$ E) $y^2=x$

7. Halle la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto (−2; 3) sea igual a la distancia de la recta $x+6=0$.

A) $(x+2)=y^2$

B) $(x+4)^2=y^2$

C) $(x+4)=(y-2)^2$

D) $(x-4)=(y-2)^2$

E) $8(x+4)=(y-3)^2$

8. Determine la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos $P(x; y)$, de tal manera que equidiste del punto (5; 8) y la recta $y=3$.

A) $10(y+5{,}5)=(x+3)^2$

B) $10(y-4)=(x+3)^2$

C) $8(y-5{,}5)=(x-4)^2$

D) $10(y-5{,}5)=(x-3)^2$

E) $10(y-5{,}5)=(x-5)^2$

NIVEL INTERMEDIO

9. Se tiene una elipse de focos $F_1(-2; 0)$ y $F_2(2; 0)$. En dicha elipse se ubican los puntos A y B, de tal manera que el área de la región F_1AF_2B sea máxima e igual a 4 u^2. Determine la ecuación de dicha elipse.

A) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{12}=1$

B) $\frac{x^2}{5}+y^2=1$

C) $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$

D) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

E) $\frac{k^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$

10. Calcule la medida del ángulo que determinan las tangentes trazadas a la parábola de la ecuación $x^2=8y$ por el punto (−2; −4).

A) arctan(3)

B) $\arccos(\sqrt{2})$

C) arcsen(3)

D) arctan(2)

E) arcsen(2)

11. Se tiene una circunferencia tangente al eje de abscisas, cuyo centro es el punto (7; 1). Calcule la ecuación de la recta de mayor inclinación y tangente a dicha circunferencia, trazada desde el punto (2; 6).

A) $3x-4y-23=0$
B) $5x-8y-30=0$
C) $x+y-3=0$
D) $3x+4y-30=0$
E) $3x+4y-10=0$

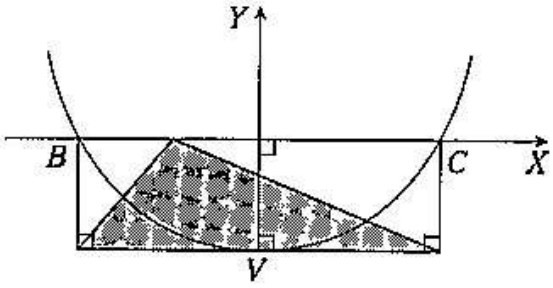
12. Se tiene una circunferencia de centro O y de ecuación $x^2+y^2-6x-6y-7=0$. Luego se traza la recta $\overleftrightarrow{\mathscr{D}}: y-1=0$, la cual es perpendicular al eje focal de una parábola que contiene a O y cuyo vértice pertenece a la circunferencia y equidista 6 u de $\overleftrightarrow{\mathscr{D}}$. Determine la ecuación de dicha parábola.

A) $(x-6)^2=\frac{3}{4}(y-7)$
B) $(x-5)^2=8-y$
C) $(x-2)^2=(y+7)$
D) $(x-6)^2=\frac{9}{4}(7-y)$
E) $(x-6)^2=\frac{4}{9}(7-y)$

13. Se tiene una parábola cuyo eje focal tiene como ecuación $4x-3y+11=0$. Si el punto $Q(36; 5)$ pertenece a la parábola siendo la abcisa de su foco 1, calcule la distancia del punto Q a la directriz.

A) 35 B) 38 C) 37
D) 36 E) 34

14. El gráfico presenta una parábola de vértice V y lado recto BC. Si el perímetro de la región sombreada es mínimo e igual a $6+3\sqrt{5}$, calcule el parámetro de dicha parábola.



A) 6 B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{3}{2}$
D) 3 E) 2

15. Se tiene una parábola de directriz $\overleftrightarrow{\mathscr{D}}_1$ y foco F. Se trazan la cuerda focal $\overline{CD}$ y el lado recto AB; luego, por A y D se trazan las perpendiculares $\overline{AP}$ y $\overline{DS}$ a $\overleftrightarrow{\mathscr{D}}_1$ $(P$ y $S \in \overleftrightarrow{\mathscr{D}}_1)$. Si $AF=4$ u y $CF=2{,}5$ u, calcule el área de la región $APSD$.

A) 56 u^2
B) 94 u^2
C) 130 u^2
D) $6(2+\sqrt{6})$ u^2
E) 120 u^2

Claves

Capítulo I

1	B	6	C	11	E	16	A	21	B
2	C	7	D	12	A	17	E	22	C
3	C	8	D	13	C	18	C		
4	B	9	C	14	B	19	B		
5	A	10	B	15	E	20	C		

Capítulo II

1	B	6	C	11	A	16	B	21	D
2	C	7	E	12	B	17	B	22	B
3	C	8	C	13	C	18	D	23	B
4	C	9	E	14	E	19	C	24	E
5	B	10	D	15	A	20	B	25	B

Capítulo III

1	C	6	C	11	D	16	A	21	A	26	E
2	B	7	C	12	A	17	C	22	C	27	B
3	C	8	B	13	C	18	B	23	B	28	A
4	D	9	A	14	B	19	D	24	E	29	C
5	A	10	C	15	B	20	E	25	C	30	C

Capítulo IV

1	C	6	B	11	A	16	A	21	E	26	C
2	C	7	A	12	C	17	D	22	B	27	E
3	B	8	A	13	B	18	E	23	B	28	E
4	A	9	B	14	A	19	E	24	C	29	E
5	A	10	B	15	D	20	E	25	B	30	C

Capítulo V

1	D	6	C	11	A	16	C	21	C	26	A
2	D	7	B	12	C	17	B	22	A	27	B
3	D	8	B	13	C	18	C	23	B	28	B
4	C	9	D	14	E	19	A	24	E	29	D
5	A	10	B	15	C	20	A	25	C	30	E

Capítulo VI

1	D	6	C	11	E	16	A	21	E
2	A	7	C	12	C	17	A	22	B
3	B	8	D	13	C	18	C	23	B
4	E	9	B	14	C	19	B	24	C
5	A	10	A	15	D	20	D	25	C

Capítulo VII

1	D	6	A	11	C	16	B	21	C	26	C
2	C	7	B	12	D	17	D	22	A	27	C
3	C	8	E	13	C	18	A	23	C	28	B
4	A	9	C	14	D	19	B	24	C	29	E
5	B	10	B	15	D	20	C	25	C	30	B

Capítulo VIII

1	A	6	A	11	C	16	E	21	C	26	E
2	D	7	D	12	B	17	E	22	D	27	C
3	E	8	A	13	D	18	D	23	D	28	A
4	B	9	D	14	A	19	C	24	D	29	E
5	B	10	C	15	A	20	C	25	B	30	D

Capítulo IX

1	C	7	C	13	B	19	C	25	C	31	E
2	D	8	C	14	A	20	C	26	B	32	B
3	C	9	D	15	B	21	B	27	C	33	D
4	D	10	A	16	C	22	E	28	A	34	B
5	B	11	A	17	C	23	B	29	A	35	B
6	C	12	B	18	E	24	E	30	D		

Capítulo X

1	E	6	E	11	E	16	B	21	A	26	D
2	D	7	B	12	B	17	C	22	B	27	B
3	A	8	B	13	D	18	A	23	A	28	B
4	C	9	A	14	A	19	C	24	C	29	E
5	D	10	E	15	A	20	C	25	A	30	B

Capítulo XI

1	A	6	A	11	A	16	B	21	B	26	D
2	C	7	A	12	A	17	D	22	E	27	A
3	C	8	E	13	C	18	D	23	C	28	A
4	C	9	A	14	A	19	E	24	E	29	C
5	E	10	C	15	B	20	C	25	E	30	E

Capítulo XII

1	E	6	D	11	A	16	A	21	B	26	B
2	E	7	D	12	A	17	E	22	D	27	E
3	C	8	A	13	A	18	B	23	E	28	A
4	B	9	B	14	A	19	B	24	D	29	E
5	B	10	B	15	C	20	B	25	C	30	E

Claves

Capítulo XIII

1	B	6	C	11	B	16	E	21	E
2	A	7	E	12	A	17	E	22	C
3	B	8	D	13	C	18	A	23	B
4	C	9	B	14	B	19	D	24	C
5	D	10	B	15	A	20	E	25	B

Capítulo XIV

1	C	6	B	11	E	16	C	21	A	26	E
2	B	7	A	12	B	17	E	22	B	27	A
3	A	8	E	13	B	18	C	23	A		
4	B	9	D	14	B	19	B	24	B		
5	A	10	E	15	B	20	C	25	A		

Capítulo XV

1	D	6	B	11	D	16	E	21	B
2	B	7	A	12	A	17	B	22	A
3	D	8	D	13	A	18	D	23	D
4	D	9	E	14	E	19	D	24	A
5	B	10	D	15	B	20	C	25	E

Capítulo XVI

1	B	6	A	11	E	16	B	21	A	26	D
2	B	7	C	12	B	17	C	22	B	27	D
3	B	8	C	13	B	18	E	23	C	28	D
4	B	9	A	14	B	19	E	24	D	29	C
5	A	10	E	15	D	20	E	25	B	30	B

Capítulo XVII

1	A	6	A	11	E	16	D	21	B
2	E	7	E	12	E	17	E	22	A
3	B	8	B	13	A	18	D	23	E
4	D	9	B	14	C	19	E	24	E
5	E	10	B	15	C	20	B	25	C

Capítulo XVIII

1	A	4	C	7	E	10	A	13	A
2	E	5	E	8	E	11	D	14	C
3	B	6	C	9	B	12	D	15	B